UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Representações de Grupos Finitos

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

FLORIANÓPOLIS - SC
DEZEMBRO - 2004

Alda Dayana Mattos

Representações de Grupos Finitos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Matemática para a obtenção do Grau de Bacharel em Matemática e Computação Científica na Universidade Federal de Santa Catarina.

Professor Dr. Eliezer Batista
Orientador

FLORIANÓPOLIS - SC
DEZEMBRO - 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação em Bacharelado em Matemática e Computação Científica e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n.º 066 / SGC / 2004.

Prof.ª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Eliezer Batista
Orientador

Ivan Pontual Costa e Silva

Ruy Exel Filho

Agradecimentos

A aquele que foi meu professor, tutor, coordenador e amigo, José Luiz Rosas Pinho, por tudo e principalmente por servir de exemplo não só como educador, mas como pessoa; ao meu orientador, meu querido mestre, Eliezer Batista, por toda sua paciência em explicar tantas quantas fossem necessárias as vezes, até que nos convencêssemos que havíamos realmente aprendido, e por ter se tornado um grande amigo; ao querido professor Paulo Henrique Viana de Barros, por ter nos ensinado muito mais do que matemática, mas sim verdadeiras lições de vida.

Aos meus queridos amigos, Rodrigo Maciel Rosa e Jucavo Savie Rocha, por terem tornado dias difíceis em dias menos difíceis, madrugadas de estudos muito mais alegres, finais de semanas de confinamento mais adoráveis, e por toda a verdadeira amizade que nasceu deste convívio.

A minha mãe Jussara Mattos e ao meu irmão Vanderlei Antônio de Mattos Junior por todo o apoio e compreensão.

Ao meu grande amor Fernando de Lacerda Mortari, que admiro como matemático e principalmente como pessoa, por tudo, por ter me dado uma grande complementação aos meus estudos, me ensinado tantas coisas, por ter me ajudado na confecção deste trabalho e por tornar meus dias muito mais felizes.

E por fim, mas não menos importante, aos meus fiéis companheiros peludos, Barich e Zica que literalmente se debruçaram sobre minhas notas.

Sumário

Introdução

Este trabalho fala sobre a teoria de representações de grupos finitos. Espera-se que o leitor já esteja familiarizado com a teoria de grupos, tenha um bom conhecimento em álgebra linear e domine alguns conceitos da teoria de produtos tensoriais.

Um grupo é um objeto matemático abstrato, e o que a teoria de representações faz é realizá-lo através de um homomorfismo nas transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial. Esta teoria nos fornece uma vasta gama de resultados extremamente úteis na resolução de problemas de teoria de grupos.

Um importante passo, comum em matemática, é classificar os objetos em que se está trabalhando, no nosso caso as representações. No capítulo 1 veremos que dada uma representação do grupo G em um espaço vetorial com produto interno $\mathbb{V}$ sempre podemos encontrar um produto interno em $\mathbb{V}$ tal que ela seja unitária. Portanto, a primeira grande conclusão é que podemos sem perda de generalidade considerar apenas as representações unitárias. Em seguida veremos o conceito de representação irredutível e obteremos o resultado de que toda representação é unitariamente equivalente a uma soma direta de representações irredutíveis; logo, podemos restringir ainda mais nosso universo de representações, nos preocupando apenas com as irredutíveis e ainda, para fins desta classificação veremos que podemos tomar o conjunto das representações irredutíveis e quocientar pela relação ser unitariamente equivalente. Desta forma temos um controle maior sobre as representações, pois podemos obter resultados neste conjunto mais restrito e depois estendê-los a todas as outras. Definiremos a C^*-álgebra de um grupo, trabalharemos um pouco com $*-$representações, veremos o importante resultado que existe uma relação $1-1$ entre as $*-$representações da C^*-álgebra do grupo G e as representações do grupo G. Demonstraremos as 2 formas do lema de Schur, que serão dois resultados muito usados por todo o restante do trabalho, veremos como construir novas representações através de outras pelo produto tensorial e finalizaremos esse capítulo com uma discussão sobre representações unidimensionais.

No segundo e último capítulo, obteremos no início algumas relações de ortogonalidade que nos muito serão úteis, definiremos o que é um caracter de uma representação e veremos que há uma relação inesperada entre a teoria de representações de grupos e a teoria de números algébricos, esta ligação é feita justamente pelos caracteres. Faremos então uma incursão à teoria básica de números inteiros algébricos para obtenção de resultados que serão cruciais para a demonstração do nosso último e, em minha opinião, o mais bonito e impressionante dos resultados por nós aqui apresentados: o teorema da dimensão.

Capítulo 1

Representações de grupos finitos

Como visto na introdução, a idéia de representar um grupo abstrato concretamente, é o que a teoria de representações faz. Nessa teoria, realiza-se os elementos do grupo como transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial, onde ainda podemos ver estas transformações lineares como matrizes e então usar toda a teoria de álgebra linear que nos for conveniente.

Neste capítulo mostraremos primeiro que para grupos finitos, podemos restringir a atenção a representações unitárias e depois a representações irredutíveis. Definiremos a C^*-álgebra de um grupo. Terminaremos o capítulo discutindo como construir novas representações a partir de outras através do produto tensorial.

1.1 Definição e unitariedade

Sejam $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$. Definimos $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ como o conjunto das aplicações lineares de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{W}$, quando $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ denotaremos este conjunto por $\mathcal{L}(\mathbb{V})$. Definimos também $GL(\mathbb{V}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{V})$ como o conjunto das aplicações lineares inversíveis de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$ e denotaremos por Id a aplicação identidade em $\mathbb{V}$, claramente $Id \in GL\mathbb{V}$. Observe que $GL(\mathbb{V})$ tem uma estrutura de grupo sob a operação de composição, sendo a transformação Id a identidade do grupo.

Definição 1.1.1 *Seja G um grupo, e $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\Bbbk$ de dimensão n; uma* representação do grupo G sobre o espaço vetorial $\mathbb{V}$ *é um homomorfismo de grupos $U : G \longrightarrow GL(\mathbb{V})$.*

Chamamos o inteiro n, o grau *da representação U. E ainda, se U é injetora, a representação é dita* fiel.

De agora em diante, por todo o texto, exceto quando dito em contrário, consideremos espaços vetoriais sobre os complexos, ou seja, isomorfos a $\mathbb{C}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$ e G um grupo finito de ordem $\#(G)$.

Observe que $\mathbb{C}$ é um corpo de característica zero. Com certeza a característica do corpo sob o qual o espaço vetorial é tomado é crucial para muitos resultados. Poderíamos nos perguntar se é possível fazer uma teoria com corpos de característica p, com p primo. Se p divide a ordem do grupo G, essa teoria recebe inclusive uma denominação própria, é chamada a Teoria de Representações Modulares ou Teoria de Brauer. Mas não entraremos em mais detalhes sobre este assunto, já que não é o objetivo deste trabalho trabalhar com corpos de característica diferente de zero.

Toda vez que no texto nos referirmos a uma representação U sem mencionarmos o grupo ou o espaço vetorial, estamos querendo nos referir a representação U do grupo G sobre o espaço vetorial $\mathbb{V}$ não nulo.

Exemplo 1.1.2 *Considere S_3 o grupo das permutações de 3 elementos. De teoria de grupos sabemos que*

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\},$$

onde e é a unidade do grupo, (132) *é a permutação que leva o* 1 *no* 3*, o* 3 *no* 2 *e o* 2 *no* 1*, e assim por diante.*

Note que $\alpha = (123)$ e $\beta = (12)$ são os geradores, pois:

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta &= (123)(12) = (13) \\ \alpha^2 &= (123)(123) = (132) \\ \alpha^2 \circ \beta &= (132)(12) = (23) \end{aligned}$$

e ainda

$$\alpha^3 = e = \beta^2.$$

Logo

$$S_3 = \left\{e, \beta, \alpha \circ \beta, \alpha^2 \circ \beta, \alpha, \alpha^2\right\},$$

mas ainda podemos escrevê-lo em termos de seus geradores e suas relações:

$$S_3 = \left\langle \alpha, \beta : \alpha^3 = e = \beta^2, \beta\alpha = \alpha^2\beta \right\rangle.$$

Para definirmos uma representação, basta definirmos nos geradores e verificarmos que as relações do grupo são preservadas na imagem dos geradores.

Tomemos $\mathbb{V} = \mathbb{C}^2$ e seja

$$w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \in \mathbb{C}.$$

Escreva

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix} \text{ e } U(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & w \\ \overline{w} & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente

$$[U(\alpha)]^3 = [U(\beta)]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e note que

$$\begin{pmatrix} 0 & w \\ \overline{w} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & w \\ \overline{w} & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $U : S_3 \longrightarrow GL(\mathbb{V})$*, onde a* $\dim(\mathbb{V})$ *é igual a 2, determinada por* $U(\alpha)$ *e* $U(\beta)$ *é uma representação de* S_3*.*

Vejamos agora uma outra representação de S_3*, só que agora sobre* $\mathbb{V} = \mathbb{C}^6$*. Tomemos*

$$S_3 = \left\{e, \beta, \beta\alpha, \alpha\beta = \beta\alpha^2, \alpha, \alpha^2\right\},$$

nesta ordem, como base. Escreva

$$V(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } V(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com um pouco de paciência é facilmente verificável que

$$[V(\alpha)]^3 = [V(\beta)]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$V(\beta)\, V(\alpha) = V(\alpha)^2\, V(\beta).$$

e assim podemos definir uma representação $V : S_3 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^{\ntriangleleft})$ *a partir de* $V(\alpha)$ *e* $V(\beta)$*.*

Exemplo 1.1.3 *Seja* $D_4 = \left\langle x, y : x^2 = e = y^4, x^{-1}yx = y^{-1} \right\rangle$ *grupo dihedral (simetria do quadrado) de ordem* 8*.*

É sabido que D_4 *é gerado por elementos* x, y *satisfazendo as relações:*

$$x^2 = e,\ y^4 = e,\ x^{-1}yx = y^{-1} \text{ ou } (yx)^2 = e.$$

Definimos uma representação de D_4 *em* $\mathbb{C}^2$*; devemos portanto achar matrizes* 2×2 $U(x)$ *e* $U(y)$ *satisfazendo as relações acima, já que* $U : D_4 \longrightarrow GL(\mathbb{V})$ *deve ser um homomorfismo. Sejam*

$$U(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } U(y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É facilmente verificável estas matrizes obedecem às relações

$$[U(x)]^2 = [U(y)]^4 = [U(y)U\,(x)]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto $U : D_4 \longrightarrow GL(2, \mathbb{V})$ *determinada por* $U(x)$ *e* $U(y)$ *define uma representação de grau* 2 *de* D_4.

Observe que encontrar matrizes satisfazendo as relações $x^2 = e = y^4$ *é fácil, porém, quando se tem outras relações a serem satisfeitas, a escolha pode não fornecer uma representação para o grupo em questão.*

Definição 1.1.4 *Um* produto interno em $\mathbb{V}$ *é uma aplicação sesquilinear*

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{C}$$

satisfazendo para quaisquer $v, w \in \mathbb{V}$*:*

1. $\langle \cdot, v\rangle : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ *é linear;*
2. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$*;*
3. $\langle v, v\rangle \geq 0$ *e* $\langle v, v\rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

Definição 1.1.5 *Uma representação* U *sobre um espaço vetorial com produto interno* $\mathbb{V}$ *é dita* unitária *relativa ao produto interno de* $\mathbb{V}$ *quando* $U(g)$ *é um operador unitário para todo* $g \in G$ *, ou seja,*

$$\langle U(g)v, U(g)w\rangle = \langle v, w\rangle\ \forall v, w \in \mathbb{V},\ \forall g \in G.$$

Observe que o conjunto dos operadores unitários de $\mathbb{V}$ tem estrutura de grupo, comumente denotado por $\mathcal{U}(\mathbb{V})$. No que segue, usamos o termo "espaço de Hilbert" como sinônimo de "espaço vetorial com produto interno", uma vez que tais noções coincidem em dimensão finita.

A teoria de representações de grupos busca classificar, de certo modo, tais homomorfismos. Um importante primeiro passo é restringirmo-nos a representações unitárias.

Teorema 1.1.6 *Dada uma representação* U *de* G *existe um produto interno em* $\mathbb{V}$ *tal que* U *é unitária relativa ao mesmo.*

Prova Seja $\langle\ ,\ \rangle_0$ um produto interno em $\mathbb{V}$; defina

$$\begin{array}{rcl} \langle\ ,\rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (v, w) & \longmapsto & \langle v, w\rangle \end{array}$$

dada por

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} \langle U(g)v, U(g)w\rangle_0,\ \forall v, w \in \mathbb{V}.$$

Claramente tem-se que $\langle \ , \ \rangle$ é sesquilinear.

Seja $h \in G$ arbitrário. Então

$$\begin{aligned}\langle U(h)v, U(h)w\rangle &= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}\langle U(hg)v, U(hg)w\rangle_0 = \\ &= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}\langle U(g)v, U(g)w\rangle_0 = \\ &= \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

Observe que na segunda igualdade usamos o fato de que para um h fixado, a função $g \longmapsto gh$ é uma bijeção, e portanto ao g percorrer G , gh também percorrerá G .

Portanto temos que U é unitária relativa ao produto interno definido acima.

■

Note que o fato de G ser finito é fundamental, como ilustrado no exemplo abaixo:

Exemplo 1.1.7 *Considere $G = \mathbb{Z}$, fixe $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, e defina $U_a : \mathbb{Z} \longrightarrow GL(\mathbb{C})$ por $U_a(n) = L_{a^n}$, o operador de multiplicação por a^n, onde $n \in \mathbb{N}^*$.*

É fácil ver que $\mathbb{C}$, possui um único produto interno a menos de constante real positiva, a saber,

$$\langle z, w \ \rangle = z\overline{w}, \ \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Se $|a| \neq 1$, então U_a não será unitário. De fato, sejam $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários. Então

$$\langle U_a(z), U_a(w)\rangle = \langle L_{a^n}(z), L_{a^n}(w)\rangle = \langle a^n z, a^n w\rangle = a^n z\overline{a^n w} = |a^n|\, z\overline{w}.$$

Note que

$$|a^n|\, z\overline{w} \neq z\overline{w} = \langle z, w \ \rangle,$$

já que por hipótese $|a^n| \neq 1$.

Logo U_a não é unitário.

De agora em diante, no decorrer de todo o texto, quando dissermos "representação de G ", queremos dizer "representação unitária de G ". O Teorema acima nos garante essencialmente que não há perda de generalidade em fazermos esta restrição quando G é finito.

Proposição 1.1.8 *Dada uma representação U de G, para todo $g \in G$ temos que os autovalores de $U(g)$ são raízes da unidade.*

Prova Para todo $g \in G$ existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $g^n = e$, já que G é finito. Então

$$[U(g)]^n = U(g^n) = U(e) = Id.$$

Seja $\lambda_g \in \mathbb{C}$ um autovalor de $U(g)$, então

$$U(g)v_g = \lambda_g v_g,$$

onde v_g é um autovetor associado ao autovalor λ_g. Note que

$$\begin{aligned} U(g)v_g = \lambda_g v_g &\Longrightarrow U(g)U(g)v_g = U(g)\lambda_g v_g \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow [U(g)]^2 v_g = \lambda_g U(g) v_g \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow U(g^2)v_g = \lambda_g^2 v_g. \end{aligned}$$

Por indução temos

$$\begin{aligned} U(g^n)v_g &= \lambda_g^n v_g \Longrightarrow Id v_g = \lambda_g^n v_g \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \lambda_g^n v_g - v_g = 0 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow v_g(\lambda_g^n - 1) = 0. \end{aligned}$$

Como v_g é autovetor

$$\lambda_g^n - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_g^n = 1.$$

Portanto λ_g é raiz da unidade,

■

Definição 1.1.9 *Sejam $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ e $V : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{W})$ duas representações do mesmo grupo finito G. Dizemos que U e V são representações* unitariamente equivalentes *(ou simplesmente equivalentes) se, e somente se, existir uma aplicação linear unitária $W : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ tal que para todo $g \in G$ temos que*

$$V(g) = WU(g)W^*.$$

Observação 1.1.10 *Como W é unitário, $W^* = W^{-1}$, donde na definição acima poderíamos escrever*

$$V(g) = WU(g)W^{-1} \ \forall g \in G.$$

Nosso objetivo é classificar representações a menos de equivalência. Poderíamos nos perguntar por que não consideramos a “priori” uma noção mais fraca de equivalência, onde W é considerado somente inversível. Por causa da unitariedade das representações, isto não muda nada, pois temos o teorema a seguir:

Teorema 1.1.11 *Sejam U, V representações unitárias de G em espaços de Hilbert $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, respectivamente. Suponha que exista uma aplicação linear inversível $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ tal que*

$$U(g) = T^{-1}V(g)T \ \forall g \in G.$$

Então existe uma aplicação unitária $W : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ tal que

$$U(g) = W^*V(g)W \ \forall g \in G.$$

Prova Seja $g \in G$. Então,

$$U(g^{-1}) = (U(g))^{-1} = (U(g))^{*} = \left(T^{-1}V(g)T\right)^{*} = T^{*}(V(g))^{*}\left(T^{-1}\right)^{*} = T^{*}V(g^{-1})\,(T^{*})^{-1}.$$

Logo $U(g) = T^{*}V(g)(T^{*})^{-1}$, e sabemos que $V(g) = TU(g)T^{-1}$. Então
$U(g) = T^{*}TU(g)T^{-1}(T^{*})^{-1} \Longrightarrow T^{*}T = U^{-1}(g)(T^{*}T)U(g)$.

$|T| := (T^{*}T)^{\frac{1}{2}}$ é a única raiz quadrada do operador $T^{*}T$, pois $T^{*}T \geq 0$, como a conjugação por um unitário comuta com a operação de raiz quadrada, temos que

$$\begin{aligned} |T| = (T^{*}T)^{\frac{1}{2}} &= [U^{-1}(g)(T^{*}T)U(g)]^{\frac{1}{2}} = \\ &= U^{-1}(g)(T^{*}T)^{\frac{1}{2}}U(g) = \\ &= U^{-1}(g)|T|U(g). \end{aligned}$$

Seja $T = W|T|$ a decomposição polar de $T^{*}T$. W é unitário de $\mathbb{V}$ para $\mathbb{W}$. Como $|T|$ é inversível,

$$\begin{aligned} WU(g)W^{-1} &= T|T|^{-1}U(g)|T|T^{-1} = TU(g)T^{-1} = V(g) \\ &\Longrightarrow U(g) = W^{*}V(g)W \ \forall g \in G. \end{aligned}$$

■

1.2 Irredutibilidade e redução completa

Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{k}$. A sua *soma direta* $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$ é o espaço vetorial definido como o produto cartesiano $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$ com as operações induzidas coordenada por coordenada, por exemplo para $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2).$$

Se $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ são espaços de Hilbert, então $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$ também o será com o produto interno

$$\langle (v_1, w_1), (v_2, w_2) \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle_{\mathbb{V}} + \langle v_2, w_2 \rangle_{\mathbb{W}}.$$

Se $V \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ e $W \in \mathcal{L}(\mathbb{W})$, definimos $V \oplus W \in \mathcal{L}(\mathbb{V} \oplus \mathbb{W})$ por

$$(V \oplus W)(v, w) = (Vv, Ww).$$

Note que $(V \oplus W)(V_1 \oplus W_1) = (VV_1 \oplus WW_1)$, e se $V \in \mathcal{U}(\mathbb{V})$, $W \in \mathcal{U}(\mathbb{W})$, então $V \oplus W \in \mathcal{U}(\mathbb{V} \oplus \mathbb{W})$. Segue-se que se V, W são representações de G em $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, respectivamente, então

$$\begin{aligned} V \oplus W : G &\longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}) \\ (V \oplus W)(g) &\longmapsto U(g) \oplus V(g) \end{aligned}$$

também é representação de G. Ela é chamada *representação soma direta de* $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ (ou a soma direta das representações V e W). Analogamente, podemos definir soma direta de espaços vetoriais e representação soma direta de representações para $n \in \mathbb{N}^*$ com $n > 2$.

Podemos construir representações mais complexas de G utilizando a soma direta. Isto nos sugere tentarmos utilizar a soma direta para simplificar uma representação; a grosso modo, procure as representações que não podem ser escritas como uma soma direta de outras representações, e use estas representações como "blocos construtores" das representações. A seguinte definição é imprescindível para esta "construção":

Definição 1.2.1 *Seja U uma representação de G em $\mathbb{V}$. Um subespaço $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ é chamado U-invariante se para todo $g \in G$ e $w \in \mathbb{W}$, $U(g)w \in \mathbb{W}$.*

Definição 1.2.2 *Uma representação $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ é dita* irredutível *se os únicos subespaços U-invariantes de $\mathbb{V}$ forem $\{0\}$ e $\mathbb{V}$.*

Definição 1.2.3 *Dizemos que uma representação U de G em $\mathbb{V}$é* redutível*, se não for irredutível.*

Teorema 1.2.4 *O complemento ortogonal de um subespaço U-invariante $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ também será U-invariante.*

Prova Seja $\mathbb{W}^\perp = \{v \in \mathbb{V} : \langle v, w\rangle = 0 \ \forall w \in \mathbb{W}\}$.

Tome $v \in \mathbb{W}^\perp$, $g \in G$ e $w \in \mathbb{W}$, arbitrários. Então,

$$\langle U(g)v, w\rangle = \left\langle U(g^{-1})U(g)v, U(g^{-1})w\right\rangle = \left\langle v, U(g^{-1})w\right\rangle = 0,$$

pois $U(g^{-1})w \in \mathbb{W}$.

Assim, $U(g)v \in \mathbb{W}^\perp \ \forall g \in G$, $\forall v \in \mathbb{W}^\perp$.

Portanto $\mathbb{W}^\perp$ é U -invariante.

■

Se uma representação U é tal que $\mathbb{V}$ possui um subespaço $\mathbb{W}$ que é U-invariante, podemos encontrar a partir de $\mathbb{W}$ uma representação soma direta apropriada que é equivalente a U, da seguinte forma:

Se $\exists \ \mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ subespaço U-invariante então note que $\mathbb{V}$ é isomorfo a $\mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$ via a aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp &\longrightarrow \mathbb{V} \\ (w_1, w_2) &\longmapsto T(w_1, w_2) \end{aligned}$$

dada por

$$T(w_1, w_2) = w_1 + w_2.$$

Além disso, T é unitária quando $\mathbb{V}$ é um espaço de Hilbert, e o produto interno em $\mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$ é dado como acima, a partir dos produtos internos em $\mathbb{W}$ e $\mathbb{W}^{\perp}$ induzidos do produto interno de $\mathbb{V}$. De fato, dados $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$ arbitrariamente, temos

$$\begin{aligned}
\langle T(w_1, w_2), T(v_1, v_2)\rangle_{\mathbb{V}} &= \langle w_1 + w_2, v_1 + v_2\rangle_{\mathbb{V}} = \\
&= \langle w_1, v_1\rangle_{\mathbb{W}} + \langle w_2, v_2\rangle_{\mathbb{W}^{\perp}} = \\
&= \langle (w_1, w_2), (v_1, v_2)\rangle_{\mathbb{W}\oplus\mathbb{W}^{\perp}}.
\end{aligned}$$

Sejam $\iota_1 : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}$ e $\iota_2 : \mathbb{W}^{\perp} \longrightarrow \mathbb{V}$ as inclusões; então $\iota_1^* : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ e $\iota_2^* : V \longrightarrow \mathbb{W}^{\perp}$ são as projeções ortogonais sobre $\mathbb{W}$ e $\mathbb{W}^{\perp}$, respectivamente; temos que $\iota_1\iota_1^* : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ é a projeção ortogonal de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{W}$ com contradomínio $\mathbb{V}$, e da mesma forma $\iota_2\iota_2^* : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ é a projeção ortogonal de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{W}^{\perp}$ com contradomínio $\mathbb{V}$. Ainda, $\iota_1^*\iota_1 = Id_{\mathbb{W}}$, assim como $\iota_2^*\iota_2 = Id_{\mathbb{W}^{\perp}}$.

Defina

$$\begin{aligned}
U|_{\mathbb{W}} : G &\longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{W}) \\
g &\longmapsto \iota_1^* U(g)\iota_1
\end{aligned}$$

e similarmente

$$\begin{aligned}
U|_{\mathbb{W}^{\perp}} : G &\longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{W}^{\perp}) \\
g &\longmapsto \iota_2^* U(g)\iota_2
\end{aligned}$$

Note que para todo $g \in G$, $U|_{\mathbb{W}}(g)$ é de fato unitário pois

$$[U|_{\mathbb{W}}(g)]^* U|_{\mathbb{W}}(g) = \iota_1^* [U(g)]^* \iota_1\iota_1^* U(g)\iota_1 = \iota_1^* [U(g)]^* U(g)\iota_1 = \iota_1^* U(g^{-1}g)\iota_1 = \iota_1^*\iota_1 = Id_{\mathbb{W}},$$

e analogamente $U|_{\mathbb{W}}(g)[U|_{\mathbb{W}}(g)]^* = Id_{\mathbb{W}}$; uma conta semelhante prova que $U|_{\mathbb{W}^{\perp}}(g)$ é unitário para todo $g \in G$.

Afirmamos que U é equivalente a $U|_{\mathbb{W}} \oplus U|_{\mathbb{W}^{\perp}}$; de fato, para $v \in \mathbb{V}$ arbitrário, $v = w_1 + w_2$ para uma escolha única de $w_1 \in \mathbb{W}$, $w_2 \in \mathbb{W}^{\perp}$. Assim, para todo $g \in G$,

$$\begin{aligned}
T(U|_{\mathbb{W}} \oplus U|_{\mathbb{W}^{\perp}})(g)\, T^{-1}(v) &= T(U|_{\mathbb{W}}(g) \oplus U|_{\mathbb{W}^{\perp}}(g))\, T^{-1}(v) = \\
&= U|_{\mathbb{W}}(g)(w_1) + U|_{\mathbb{W}^{\perp}}(g)(w_2) = \\
&= \iota_1^* U(g)\iota_1(w_1) + \iota_2^* U(g)\iota_2(w_2) = \\
&= U(g)(w_1) + U(g)(w_2) = \\
&= U(g)(v).
\end{aligned}$$

Em outras palavras, U é equivalente a uma soma direta de representações.

Corolário 1.2.5 *Uma representação $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ é irredutível se, e só se, não é equi-*

valente a uma soma direta de representações próprias.

Teorema 1.2.6 *Toda representação $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ é equivalente a uma soma direta de representações irredutíveis.*

Prova Indução sobre $\dim(\mathbb{V})$.

- $\dim(\mathbb{V}) = 1$, nada a fazer, pois os únicos subespaços de $\mathbb{V}$ são os triviais $(\{0\}, \mathbb{V})$, logo U é irredutível.
- Suponha que o resultado é válido para $\dim(\mathbb{V}) < n$ (2° princípio de indução).
    1. Se $\mathbb{V}$ não possui subespaços U-invariantes então U é irredutível.
    2. Se $\exists\ \mathbb{W} \subsetneq \mathbb{V}$ U-invariante, $\dim(\mathbb{W}) < n$ e $\dim(\mathbb{W}^{\perp}) < n$. Então, pela hipótese de indução temos
    $U \sim U|_{\mathbb{W}} \oplus U|_{\mathbb{W}^{\perp}} \sim U_1 \oplus \ldots \oplus U_k \oplus U_1' \oplus \ldots \oplus U_l'$, onde $U_1, \ldots, U_k$ são representações irredutíveis cuja a soma é equivalente a $U|_{\mathbb{W}}$, assim como $U_1', \ldots, U_l'$ são representações irredutíveis cuja soma é equivalente a $U|_{\mathbb{W}^{\perp}}$.

■

Observe que a relação "ser unitariamente equivalente" é uma relação de equivalência. Considere o conjunto de todas as representações irredutíveis de G , faça o quociente por esta relação e, denote por $\widehat{G}$ este quociente, ou seja, $\widehat{G}$ é o conjunto das classes de equivalência das representações irredutíveis de G.

Para cada $\alpha \in \widehat{G}$, fixaremos a partir de agora um representante $D^{(\alpha)} : G \longrightarrow \mathcal{U}\left(\mathbb{V}^{(\alpha)}\right)$ desta classe; se d_α é o grau da representação $D^{(\alpha)}$, note que podemos ver $D^{(\alpha)}$ como uma matriz $d_\alpha \times d_\alpha$ com coeficientes $D_{ij}^{(\alpha)} \in \mathcal{F}(G, \mathbb{C}) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é função}\}$, de modo que, para todo $g \in G$, $D^{(\alpha)}(g) = \left[D_{ij}^{(\alpha)}(g)\right]_{ij=1}^{d_\alpha}$.

1.3 A álgebra de grupo e representações regulares

Definição 1.3.1 *Uma* álgebra $\mathcal{A}$ *sobre* $\mathbb{C}$ *é um espaço vetorial complexo equipado com uma operação bilinear e associativa*

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (a, b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

Definição 1.3.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Uma* involução *em $\mathcal{A}$ é uma função*

$$\begin{array}{rcl} (\cdot)^* : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ a & \longmapsto & a^* \end{array}$$

satisfazendo para todo $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ as seguintes condições:

1. $(a+b)^* = a^* + b^*$;

2. $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$;

3. $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$;

4. $(a^*)^* = a$.

Definição 1.3.3 *Dada uma álgebra $\mathcal{A}$ e $(\cdot)^*$ uma involução em $\mathcal{A}$, dizemos que $(\mathcal{A}, (\cdot)^*)$ é uma* $*-$álgebra.

Definição 1.3.4 *Uma* álgebra normada $\mathcal{A}$ *é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ equipada com uma função* norma

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \|a\| \end{array}$$

que faz com que $\mathcal{A}$ seja uma espaço normado, ou seja, para todo $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tenhamos:

1. $\|a\| \geq 0$;

2. $\|a\| = 0 \Longrightarrow a = 0$;

3. $\|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\|$, *onde $|\lambda|$ indica o módulo do número complexo λ*;

4. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$,

   e além disso obedeça ao seguinte axioma envolvendo a operação de multiplicação:

5. $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \, \|b\|$.

Definição 1.3.5 *Uma* álgebra de Banach *é uma álgebra normada completa.*

Definição 1.3.6 *Uma* $*-$álgebra de Banach *é uma álgebra de Banach com uma involução $(\cdot)^*$ satisfazendo para todo $a \in \mathcal{A}$*

$$\|a^*\| = \|a\|.$$

Exemplo 1.3.7 *Seja $\mathbb{V}$ um $\mathbb{C}-$espaço vetorial de dimensão finita. Note que o espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ das transformações lineares $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ possui uma estrutura de álgebra com "produto" dado pela composição de transformações lineares e caso $\mathbb{V}$ tenha produto interno $\langle \ , \rangle$, $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ com a norma de operadores dada por:*

$$||T|| = \sup_{||v||_0 \leq 1} \{||T(v)||_0\} \ \forall T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}),$$

onde $v \in \mathbb{V}$ e $\|\cdot\|_0 = \sqrt{\langle \ , \rangle}$, é uma $*-$álgebra de Banach (pois $\mathbb{V}$ tem dimensão finita) com involução dada pela adjunção de operadores. Note que alternativamente poderíamos ter definido a norma em $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ por:

$$||T|| = \sup_{\substack{||v||_0 \leq 1 \\ ||w||_0 \leq 1}} \{| \langle v, T(w) \rangle |\} \ \forall T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}),$$

onde $v, w \in \mathbb{V}$.

Definição 1.3.8 *Uma C^*-*álgebra *é uma $*-$ álgebra de Banach que satisfaz para todo $a \in \mathcal{A}$*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 .$$

Considere $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ o espaço vetorial (sobre $\mathbb{C}$) das funções de G em $\mathbb{C}$, onde a soma e o produto por escalar são definidos ponto a ponto.

Para cada $g \in G$, defina

$$\begin{array}{rcl} \delta_g : G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longmapsto & \delta_g(h) = \delta_{g,h} \end{array}$$

onde $\delta_{g,h} = 0$ se $g \neq h$ e $\delta_{g,h} = 1$ se $g = h$.

Note que $\{\delta_g\}_{g \in G}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$, pois:

Defina $f = \sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g$, onde $a_g \in \mathbb{C} \ \forall g \in G$. Suponha que $f = \sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g = 0$. Mas, para todo $h \in g \quad f(h) = a_h$. Logo para todo $h \in G$ temos que $a_h = 0$, donde segue que $\{\delta_g\}_{g \in G}$ é um conjunto linearmente independente.

Definição 1.3.9 $\mathbb{C}G := \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$.

Note que $\{\delta_g\}_{g \in G}$ é base de $\mathbb{C}G$ como espaço vetorial.

Defina a seguinte operação em $\mathbb{C}G$:

$$\begin{array}{rcl} * : \mathbb{C}G \times \mathbb{C}G & \longrightarrow & \mathbb{C}G \\ (a, b) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

onde

$$(a * b)(g) = \sum_{h \in G} a(h) b(h^{-1} g).$$

Proposição 1.3.10 *$*$ é bilinear e associativa.*

Prova Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}G, \lambda \in \mathbb{C}$ e $g \in G$, arbitrários.

- Bilinearidade:

$$\begin{aligned}
[a*(b+\lambda c)](g) &= \sum_{h\in G} a(h)(b+\lambda c)(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h\in G} a(h)[b(h^{-1}g)+\lambda c(h^{-1}g)] = \\
&= \sum_{h\in G} a(h)b(h^{-1}g)+a(h)\lambda c(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h\in G} a(h)b(h^{-1}g)+\lambda\sum_{h\in G} a(h)c(h^{-1}g) = \\
&= [(a*b)+\lambda(a*c)](g).
\end{aligned}$$

Analogamente tem-se que

$$(a+\lambda b)*c = (a*c)+\lambda(b*c).$$

- Associatividade:

$$\begin{aligned}
[(a*b)*c](g) &= \sum_{h\in G}(a*b)(h)c(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h,l\in G} a(l)b(l^{-1}h)c(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h',l\in G} a(l)b(h')c((h')^{-1}l^{-1}g) = \\
&= \sum_{l\in G} a(l)(b*c)(l^{-1}g) = [a*(b*c)](g),
\end{aligned}$$

donde segue o resultado. Note que na terceira igualdade simplesmente usamos o fato que existe um $h\prime \in G$ tal que

$$l^{-1}h = h' \Longrightarrow h = lh' \Longrightarrow h^{-1} = \left(h'\right)^{-1} l^{-1}.$$

■

A operação $*$ é chamada *produto de convolução*.
Observe que poderíamos ter definido o produto de convolução por

$$(a*b)(g) = \sum_{h\in G} a(gh^{-1})b(h)\ \forall a,b\in\mathbb{C}G, \forall g\in G$$

e, que $\mathbb{C}G$ com o produto de convolução é uma álgebra.
O leitor pode se perguntar sob quais hipóteses é garantida a comutatividade do produto

de convolução. Observe que para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}G$ temos

$$(a * b)(g) = \sum_{h \in G} a(h)b(h^{-1}g) = \sum_{l \in G} b(l)a(gl^{-1}).$$

Logo se o grupo G for abeliano o produto de convolução será comutativo.

Definição 1.3.11 *$\mathbb{C}G$ com o produto de convolução é chamado a* álgebra do grupo G.

Agora defina na álgebra do grupo G a seguinte operação

$$\begin{array}{rcl} (\cdot)^* : \mathbb{C}G & \longrightarrow & \mathbb{C}G \\ a & \longmapsto & a^* \end{array}$$

onde $a^*(g) = \overline{a(g^{-1})}$.

Proposição 1.3.12 *$(\cdot)^*$ é uma involução em $\mathbb{C}G$.*

Prova Sejam $a, b \in \mathbb{C}G$, $g \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$, arbitrários.

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$,pois

$$\begin{aligned} (a + b)^*(g) &= \overline{(a + b)(g^{-1})} = \\ &= \overline{a(g^{-1}) + b(g^{-1})} = \\ &= \overline{a(g^{-1})} + \overline{b(g^{-1})} = \\ &= a^*(g) + b^*(g). \end{aligned}$$

2. $(\lambda a)^*(g) = \overline{\lambda a(g^{-1})} = \overline{\lambda}\ \overline{a(g^{-1})} = \overline{\lambda} a^*(g)$.

   Logo $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$.

3. $(a * b)^* = b^* a^*$, pois

$$\begin{aligned} (a * b)^*(g) &= \overline{a * b(g^{-1})} = \\ &= \overline{\sum_{h \in G} a(h)b(h^{-1}g^{-1})} = \\ &= \sum_{h \in G} \overline{a(h)b((gh)^{-1})} = \\ &= \sum_{l \in G} \overline{b(l^{-1})a(g^{-1}l)} = \\ &= \sum_{l \in G} b^*(l)a^*(l^{-1}g) = b^* * a^*(g). \end{aligned}$$

   Na quarta igualdade usamos o fato de que $gh = l$, para algum $l \in G$, então $h = g^{-1}l$.

4. $(a^*)^*(g) = \overline{a^*(g^{-1})} = \overline{\overline{a(g)}} = a(g)$.

   Portanto $(a^*)^* = a$.

Logo $(\cdot)^*$ é uma involução em $\mathbb{C}G$.

■

A operação $(\cdot)^*$ como definida acima é comumente denominada conjugação.

Note então que $\mathbb{C}G$ é uma $*-$álgebra com a operação de conjugação e ainda que $\mathbb{C}G$ possui unidade, a saber δ_e ; de fato, tome $g \in G$ arbitrário . Então temos que

$$\begin{aligned}(\delta_e * a)(g) &= \sum_{h\in G}\delta_e(h)a(h^{-1}g) = a(g),\\ (a * \delta_e)(g) &= \sum_{h\in G}a(h)\delta_e(h^{-1}g) = a(g),\end{aligned}$$

donde segue que δ_e é unidade de $\mathbb{C}G$.

Lema 1.3.13 *Para quaisquer $g, h \in G$ temos as seguintes relações:*

1. $\delta_g * \delta_h = \delta_{g,h}$;
2. $\delta_g^* = \delta_{g^{-1}}$.

Prova *Para quaisquer $g, h, l \in G$ temos:*

$$\begin{aligned}\delta_g * \delta_h(l) &= \sum_{m\in G}\delta_g(m)\delta_h(m^{-1}l) = \delta_{l,gh} = \delta_{gh}(l),\\ \delta_g^*(h) &= \overline{\delta_g(h^{-1})} = \delta_{g,h^{-1}} = \delta_{g^{-1},h} = \delta_{g^{-1}}(h),\end{aligned}$$

donde segue o resultado.

■

Proposição 1.3.14 *A aplicação*

$$\begin{aligned}\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}G \times \mathbb{C}G &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (a,b) &\longmapsto \langle a,b\rangle\end{aligned}$$

onde

$$\langle a,b\rangle = \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}a(g)\overline{b(g)} \quad \forall a,b \in \mathbb{C}G$$

é um produto interno em $\mathbb{C}G$ (visto como espaço vetorial).

Prova Sejam $a, b \in \mathbb{C}G$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, arbitrários.

1. Fixe $c \in \mathbb{C}G$.

$$\begin{aligned}
\langle a+\lambda b, c\rangle &= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}(a+\lambda b)(g)\overline{c(g)} = \\
&= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}[a(g)+\lambda b(g)]\overline{c(g)} = \\
&= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}a(g)\overline{c(g)} + \lambda b(g)\overline{c(g)} = \\
&= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}a(g)\overline{c(g)} + \lambda\frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}b(g)\overline{c(g)} = \\
&= \langle a, c\rangle + \quad \lambda\langle b, c\rangle .
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\overline{\langle b, a\rangle} &= \overline{\frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}b(g)\overline{a(g)}} = \\
&= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}\overline{b(g)}a(g) = \\
&= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}a(g)\overline{b(g)} \ = \langle a, b\rangle .
\end{aligned}$$

3.

$$\langle a, a\rangle = \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}a(g)\overline{a(g)} = \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}|a(g)|^2 \geq 0.$$

$$\langle a, a\rangle = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}|a(g)|^2 = 0 \Longleftrightarrow a(g) = 0 \ \forall g\in G \Longleftrightarrow a \equiv 0.$$

Portanto $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{C}G$.

■

Desta forma podemos dar a $\mathbb{C}G$ uma norma canônica, a saber,

$$\|a\|_0 = \sqrt{\langle a, a\rangle}.$$

Portanto $\mathbb{C}G$ é um espaço de Hilbert, pois é um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita (todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo na topologia da norma).

Definição 1.3.15 *Dada uma álgebra $\mathcal{A}$ (também sobre $\mathbb{C}$), uma* representação *de $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{V}$ é um homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V})$, isto é, φ satisfaz*

1. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$;

2. $\varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall a \in \mathcal{A}$;

3. $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ possui unidade e φ satisfaz adicionalmente $\varphi(\mathbf{1}) = Id$, onde $\mathbf{1}$ é a unidade da álgebra $\mathcal{A}$, dizemos que φ é representação unital *de $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{V}$.*

Definição 1.3.16 *Uma $*-$representação de uma $*-$álgebra $\mathcal{A}$ sobre o espaço vetorial com produto interno $\mathbb{V}$, é uma representação $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V})$ satisfazendo adicionalmente o axioma*

$$\varphi(a^*) = [\varphi(a)]^* \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Considere

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbb{C}G & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{C}G) \\ a & \longmapsto & L(a) := L_a \end{array}$$

onde $L_a(b) = a * b,\ \forall b \in \mathbb{C}G$.
Notemos que L é injetora. De fato:
Sejam $a, b \in \mathbb{C}G$ tais que $L(a) = L(b)$. Então, em particular para $c = \delta_e$

$$a = a * \delta_e = L_a(\delta_e) = L_b(\delta_e) = b * \delta_e = b.$$

Portanto L é injetora.

Proposição 1.3.17 *L é uma $*-$representação da $*-$álgebra $\mathbb{C}G$ sobre o espaço vetorial com produto interno $\mathbb{C}G$.*

Prova Primeiramente vamos mostrar que L é um $*-$homomorfismo.
Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}G$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, arbitrários.

1. $L_{(a+\lambda b)}(c) = (a + \lambda b) * c = a * c + \lambda(b * c) = L_a(c) + \lambda L_b(c)$.
2. $L_{a*b}(c) = (a * b) * c = a * (b * c) = L_a(b * c) = L_a(L_b(c))$.
   Portanto $L_{a*b} = L_a \circ L_b$.

Basta então provarmos que $L_{a^*} = [L_a]^*$. Isto segue de

$$\begin{aligned} \langle L_a(b), c\rangle &= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} (a * b)(g)\overline{c(g)} = \\ &= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g,h \in G} a(h)b(h^{-1}g)\overline{c(g)} = \\ &= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g' \in G} b(g') \left(\sum_{h \in G} a(h)\overline{c(hg')} \right) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g'\in G} b(g')\left(\sum_{h\in G} a^*(h^{-1})\overline{c(hg')}\right) = \\
&= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g'\in G} b(g')(a^* * c)(g') = \\
&= \langle b, L_{a^*}(c)\rangle .
\end{aligned}
$$

Observe que na terceira igualdade usamos o fato de que existe $g' \in G$ tal que $g' = h^{-1}g$. Portanto L é uma $*-$representação da álgebra $\mathbb{C}G$ sobre o espaço vetorial $\mathbb{C}G$.

■

Definição 1.3.18 *L é chamada* $*-$representação regular à esquerda *da $*-$álgebra $\mathbb{C}G$ sobre o espaço vetorial com produto interno $\mathbb{C}G$.*

Proposição 1.3.19 *A aplicação*

$$
\begin{aligned}
\|\cdot\| : \mathbb{C}G &\longrightarrow \mathbb{C} \\
a &\longmapsto \|a\| := \|L_a\| ,
\end{aligned}
$$

onde $\|L_a\|$ é a norma do operador L_a, como definida no exemplo 1.3.7 é uma norma em $\mathbb{C}G$,visto como uma $*-$álgebra de Banach.

Prova Os axiomas $1, 3$ e 4 de norma seguem das propriedades de norma de operadores.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}G$, arbitrários.

- $\|a\| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$, pois:

  ($\Leftarrow$) $a = 0$, obviamente $L_a = L(a) = L(0) = 0$; assim

  $$\|a\| = \|L_a\| = \|0\| = 0.$$

  ($\Rightarrow$) Suponha $\|a\| = 0$. Então $\|L_a\| = 0$, e portanto do fato que L é injetora temos que

  $$L(a) = L_a = 0 = L(0) \Longrightarrow a = 0.$$

- $\|a * b\| \leq \|a\| \|b\|$, pois:

$$
\begin{aligned}
\|L_{a*b}(c)\|_0 &= \langle L_{a*b}(c), L_{a*b}(c)\rangle = \\
&= \langle L_a(L_b(c)), L_a(L_b(c))\rangle = \\
&= \|L_a(L_b(c))\|_0^2 \leq \|L_a\|^2 \|L_b(c)\|_0^2 \leq \\
&\leq \|L_a\|^2 \|L_b\|^2 \|c\|_0^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \|c\|_0^2 .
\end{aligned}
$$

Logo

$$\|a * b\| = ||L_{a*b}|| \leq \|a\| \, \|b\| \, .$$

- $\|a\| = \|a^*\|$, pois:
  - se $a = 0$: $a = 0 \Longrightarrow L_a = L_{a^*} = 0$, logo

    $$\|a\| = \|L_a\| = 0 = \|L_{a^*}\| = \|a^*\| \, .$$

  - se $a \neq 0$: pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos para b, c com $\|b\|_0 \leq 1, \|c\|_0 \leq 1$ que

    $$\langle b, L_a(c) \rangle \leq \|b\|_0 \, \|L_a(c)\|_0 \leq \|b\|_0 \, \|L_a\| \, \|c\|_0 \leq \|L_a\| = \|a\| \, .$$

    Agora, $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; b \neq 0$ tal que $\|b\|_0 \leq 1$ e $\|L_a(b)\|_0 \geq \|a\| - \epsilon$.
    Escolha $\epsilon < \dfrac{\|a\|}{2}$ e $c = \dfrac{L_a(b)}{\|L_a(b)\|_0}$. Note que $\|c\|_0 = 1$ e que $\|L_a(b)\|_0 \neq 0$, já que $b \neq 0, a \neq 0$ e como L é injetora $L_a(b) \neq 0$. e Então

    $$\begin{aligned} |\langle c, L_a(b) \rangle| &= \left| \left\langle \frac{L_a(b)}{\|L_a(b)\|_0}, L_a(b) \right\rangle \right| = \\ &= \frac{1}{\|L_a(b)\|_0} \|L_a(b)\|_0^2 = \\ &= \|L_a(b)\|_0 \geq \|a\| - \epsilon. \end{aligned}$$

    Portanto,

    $$\|a^*\| = \sup_{\substack{||c||_0 \leq 1 \\ ||b||_0 \leq 1}} \{ | \langle c, L_a(b) \rangle | \} \geq \|a\| - \epsilon \;\; \forall \epsilon > 0.$$

    Logo,

    $$\|a\| \leq \|a^*\| \, .$$

    Refazendo as contas com a^* no lugar de a, teremos $\|a^*\| \leq \|a\|$,donde

    $$\|a\| = \|a^*\| \, ,$$

    e o resultado segue.

■

Note ainda que $\|\cdot\| : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfaz

$$\|a^* * a\| = \|a\|^2 \;\; \forall a \in \mathbb{C}G.$$

De fato, tome $a \in \mathbb{C}G$, arbitrário. Temos que

$$\|a^* * a\| \leq \|a^*\| \, \|a\| = \|a\|^2 .$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 &= \sup_{\|b\|_0 \leq 1} \{|\langle L_a(b), L_a(b)\rangle|\} = \\
&= \sup_{\|b\|_0 \leq 1} \{|\langle b, L_{a^* * a}(b)\rangle|\} \leq \\
&\leq \sup_{\substack{\|b\|_0 \leq 1 \\ \|c\|_0 \leq 1}} \{|\langle c, L_{a^* * a}(b)\rangle|\} = \\
&= \|a^* * a\| .
\end{aligned}$$

Portanto $\|a^* * a\| = \|a\|^2 \ \ \forall a \in \mathbb{C}G$.

Observe que provamos com isto que $\mathbb{C}G$ com o produto de convolução, a conjugação e a norma dadas acima é uma C^*-álgebra.

Como L é injetora se restringirmos seu contradomínio a sua imagem teremos um $*-$isomorfismo entre a C^*-álgebra $\mathbb{C}G$ e a $Im(L) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{C}G)$. Logo temos uma "cópia" da C^*-álgebra $\mathbb{C}G$ em $Im(L)$. Isto é muito útil, pois podemos obter resultados sobre a C^*-álgebra $\mathbb{C}G$ através da teoria de operadores em espaços de Hilbert.

Proposição 1.3.20 *$\{\sqrt{\#(G)}\delta_g\}_{g\in G}$ é uma base ortonormal do espaço vetorial $\mathbb{C}G$.*

Prova Já sabemos que $\{\sqrt{\#(G)}\delta_g\}_{g\in G}$ é base, pois $\{\delta_g\}_{g\in G}$ é base e $\#(G)$. Basta então, provarmos que é ortonormal.

Sejam $g, h \in G$ arbitrários. Então

$$\left\langle \sqrt{\#(G)}\delta_g, \sqrt{\#(G)}\delta_h \right\rangle = \frac{1}{\#(G)} \sum_{l\in G} \sqrt{\#(G)}\delta_g(l) \overline{\sqrt{\#(G)}\delta_h(l)} = \sum_{l\in G} \delta_{g,l}\delta_{h,l} = \delta_{g,h},$$

donde segue o resultado.

■

Teorema 1.3.21 *Seja $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ uma representação. Defina a aplicação*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} : \mathbb{C}G &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}) \\
a &\longmapsto \mathfrak{U}(a)
\end{aligned}$$

onde $\mathfrak{U}(a) = \sum_{g\in G} a(g)U(g)$. Então a aplicação $\mathfrak{U}$ é uma $*-$representação unital de $\mathbb{C}G$.

Reciprocamente, dado $\mathfrak{U} : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V})$ $*-$representação unital de $\mathbb{C}G$ então existe $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ representação associada a $\mathfrak{U}$ como acima.

Prova ($\Rightarrow$) Sejam $a, b \in \mathbb{C}G$, $\lambda \in \Bbbk$, v , $w \in \mathbb{V}$.

Vamos verificar primeiramente que $\mathfrak{U}$ é linear.

$$\mathfrak{U}(a+\lambda b) = \sum_{g\in G}(a+\lambda b)(g)U(g) = \sum_{g\in G}a(g)U(g) + \lambda\sum_{g\in G}b(g)U(g) = \mathfrak{U}(a) + \lambda\mathfrak{U}(b).$$

Agora note que,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}(a)\circ\mathfrak{U}(b) &= \left(\sum_{g\in G}a(g)U(g)\right)\left(\sum_{h\in G}b(h)U(h)\right) = \\
&= \sum_{g,h\in G}a(g)b(h)U(g)U(h) = \\
&= \sum_{g,h\in G}a(g)b(h)U(gh) = \\
&= \sum_{l\in G}\left(\sum_{g\in G}a(g)b(g^{-1}l)\right)U(l) = \\
&= \sum_{l\in G}(a*b)(l)U(l) = \mathfrak{U}(a*b).
\end{aligned}$$

Na quarta igualdade usamos o fato de existe $l \in G$ tal que $l = gh$.

Também temos que

$$\begin{aligned}
\langle\mathfrak{U}(a)v, w\rangle &= \left\langle\sum_{g\in G}a(g)U(g)v, w\right\rangle = \sum_{g\in G}a(g)\langle U(g)v, w\rangle = \\
&= \sum_{g\in G}a(g)\langle v, [U(g)]^{*}w\rangle = \sum_{g\in G}a(g)\left\langle v, U(g^{-1})w\right\rangle = \\
&= \left\langle v, \sum_{g\in G}\overline{a(g)}U(g^{-1})w\right\rangle = \left\langle v, \sum_{g\in G}\overline{a\left((g^{-1})^{-1}\right)}U(g^{-1})w\right\rangle \\
&= \left\langle v, \sum_{g\in G}a^{*}(g^{-1})U(g^{-1})w\right\rangle = \langle v, \mathfrak{U}(a^{*})w\rangle \\
&\Longrightarrow \mathfrak{U}^{*}(a) = \mathfrak{U}(a^{*}).
\end{aligned}$$

Por fim, temos que $\mathfrak{U}$ preserva identidade, pois

$$\mathfrak{U}(\delta_e) = \sum_{g\in G}\delta_e(g)U(g) = U(e) = Id,$$

donde segue que a aplicação $\mathfrak{U}$ é uma $*-$representação unital de $\mathbb{C}G$.

($\Leftarrow$) Defina

$$\begin{aligned}
U \quad &: \quad G \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}) \\
g \quad &\longmapsto \quad U(g) := \mathfrak{U}(g)
\end{aligned}$$

Veja que para todo $g \in G$ $\mathfrak{U}(\delta_g)$ é unitário, pois utilizando as relações do lema 1.3.13 temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}(\delta_g)\circ(\mathfrak{U}(\delta_g))^* &= \mathfrak{U}(\delta_g)\circ\mathfrak{U}(\delta_g)^* = \\
&= \mathfrak{U}(\delta_g)\circ\mathfrak{U}(\delta_{g^{-1}}) = \\
&= \mathfrak{U}(\delta_g * \delta_{g^{-1}}) = \\
&= \mathfrak{U}(\delta_e) = Id
\end{aligned}$$

e da mesma forma $(\mathfrak{U}(\delta_g))^* \circ \mathfrak{U}(\delta_g) = Id$.
Logo $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$.

- U é homomorfismo: Sejam $g, h \in G$ arbitrários.

$$U(g)U(h) = \mathfrak{U}(\delta_g)\mathfrak{U}(\delta_h) = \mathfrak{U}(\delta_g * \delta_h) = \mathfrak{U}(\delta_{gh}) = U(gh).$$

Portanto U é representação unitária associada a $\mathfrak{U}$ como queríamos.

■

Portanto, este teorema nos diz que há uma correspondência $1-1$ entre representações de G e $*-$representações de $\mathbb{C}G$.Em particular, dada L a $*$-representação regular à esquerda da C^*-álgebra $\mathbb{C}G$, o teorema nos garante a existência de uma representação $\widetilde{L} : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{C}G)$ tal que

$$L(a) = \sum_{g \in G} a(g)\,\widetilde{L}(g) \;\; \forall a \in \mathbb{C}G.$$

Note que, para cada $h \in G$,

$$L(\delta_h) = \sum_{g \in G} \delta_h(g)\,\widetilde{L}(g) = \widetilde{L}(h).$$

A representação $\widetilde{L}$ como acima é denominada *representação regular à esquerda do grupo* G.

Para o próximo resultado, consultar as definições relevantes no final da seção 1.2.

Proposição 1.3.22 *O espaço vetorial gerado pelos $D^{\alpha}_{ij} : G \longrightarrow \mathbb{C}$, onde α percorre $\widehat{G}$ e i, j percorrem $\{1, \ldots, d_\alpha\}$, separa pontos, ou seja, para quaisquer $h, l \in G$, com $h \neq l$, existe uma $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ da forma*

$$f = \sum_{\alpha, i, j} C_{\alpha i j} D^{\alpha}_{ij}, \;\; C_{\alpha i j} \in \mathbb{C},$$

tal que $f(h) = 1$ e $f(l) = 0$.

Prova Seja $\widetilde{L}$ a representação regular à esquerda do grupo G. Para cada $g \in G$, $\widetilde{L}(g) \in \mathcal{U}(\mathbb{C}G)$, logo como sabemos que $\dim(\mathbb{C}G) = \#(G)$, podemos indexar a matriz $\widetilde{L}(g)$ pelos elementos de G. Defina

$$\begin{aligned} f_h : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto f_h(g) \end{aligned}$$

onde

$$f_h(g) = \#(G)\left\langle \delta_h, \widetilde{L}(g)\,\delta_e \right\rangle.$$

Observe que $f_h(h) = 1$ e $f_h(g) = 0$, $\forall g \neq h \in G$. Agora, sabemos que $\widetilde{L}$ é equivalente a uma soma direta das representações irredutíveis $D^{(\alpha)}$ de G; logo, existe
$W : \underset{\alpha\in\widehat{G}}{\oplus} \eta_\alpha \mathbb{V}^{(\alpha)} \longrightarrow \mathbb{C}G$ unitário tal que, para todo $g \in G$,

$$\widetilde{L}(g) = W\left(\underset{\alpha\in\widehat{G}}{\oplus} \eta_\alpha D^{(\alpha)}(g)\right)W^*.$$

Os $\eta^{\gamma}_{\alpha\beta}$ são números naturais e representam o número de vezes que o termo $D^{(\gamma)}$ aparece na soma direta. Convencionaremos que, caso $D^{(\theta)}$ não apareça nesta decomposição para algum $\theta \in \widehat{G}$, então $\eta^{\theta}_{\alpha\beta} = 0$.

Vemos então que cada entrada da matriz $\widetilde{L}(g)$ é uma combinação linear das entradas da matriz $\underset{\alpha\in\widehat{G}}{\oplus} \eta_\alpha D^{(\alpha)}(g)$ (onde os coeficientes da combinação linear claramente não dependem de g), e temos a forma

$$f_h(g) = \sum_{\alpha,i,j} C_{\alpha ij} D^{\alpha}_{ij}(g),\ C_{\alpha ij} \in \mathbb{C},$$

o resultado segue.

■

Definição 1.3.23 *Seja U uma $*-$representação de $\mathbb{C}G$ em $\mathcal{L}(\mathbb{V})$. Um subespaço $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ é chamado U-invariante se para todo $a \in \mathbb{C}G$ e $w \in \mathbb{W}$, $U(a)w \in \mathbb{W}$.*

Assim como temos representações irredutíveis de grupos, analogamente definimos

Definição 1.3.24 *Uma $*$-representação $U : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V})$ é* irredutível *quando os únicos subespaços U-invariantes de $\mathbb{V}$ são $\{0\}$ e $\mathbb{V}$.*

1.4 Lemas de Schur

Teorema 1.4.1 (Lema de Schur - 1º forma) *Seja $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ uma representação irredutível e $A \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ tal que*

$$AU(g) = U(g)A \quad \forall g \in G.$$

Então $A = \lambda I$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Prova Tomando a igualdade $AU(g) = U(g)A$ para g^{-1} temos que

$$\begin{aligned} AU(g^{-1}) = U(g^{-1})A &\implies AU^*(g) = U^*(g)A \\ &\implies U(g)A^* = A^*U(g) \end{aligned}$$

Defina

$$B = \frac{A + A^*}{2}$$

$$C = \frac{A - A^*}{2i}$$

Note que B e C são auto-adjuntos, e que $A = B + iC$.

Observe ainda que B e C satisfazem a hipótese, pois:

Claramente $B, C \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ e, para qualquer $g \in G$ temos

$$\begin{aligned} BU(g) &= \left(\frac{A + A^*}{2}\right) U(g) = \frac{AU(g) + A^*U(g)}{2} = \\ &= \frac{U(g)A + U(g)A^*}{2} = U(g)\left(\frac{A + A^*}{2}\right) = \\ &= U(g)B. \end{aligned}$$

Análogo para C.

Basta então demonstrarmos para $A \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ auto-adjuntos (pois acabamos de mostrar que todo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ pode ser escrito como a combinação de duas transformações lineares auto-adjuntas).

Pelo Teorema Espectral existe uma base ortonormal de $\mathbb{V}$ de autovetores de A, A auto-adjunto.

Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de A e $v \in \mathbb{V}$ autovetor associado, isto é , $(A - \lambda I)v = 0$. Logo,

$$(A - \lambda I))(U(g)v) = U(g)(A - \lambda I)v = 0 \quad \forall g \in G.$$

Então

$$\mathbb{W}_\lambda = \{v \in \mathbb{V} \mid (A - \lambda I)v = 0\}$$

é subespaço U-invariante. Mas U é irredutível, como $\mathbb{W}_\lambda \neq \{0\}$ pois, $\mathbb{W}_\lambda$ é o auto-espaço dos autovetores de A associados a λ, temos

$$\mathbb{W}_\lambda = \mathbb{V} \implies A = \lambda I,$$

donde segue o resultado.

■

Corolário 1.4.2 *Todas as representações irredutíveis de um grupo abeliano são unidimensionais.*

Prova Seja U uma representação irredutível de G sobre $\mathbb{V}$, onde G é abeliano. Pelo teorema acima, cada $U(g)$ é um múltiplo da identidade. Logo, todo subespaço de $\mathbb{V}$ é $U-$invariante.

Suponha que exista $\mathbb{W} \subsetneq \mathbb{V}$, $\mathbb{W} \neq 0$ subespaço. Mas como vimos que toda subespaço de $\mathbb{V}$ é $U-$invariante, $\mathbb{W}$ seria $U-$invariante, contradizendo o fato de que U é irredutível. Portanto $\mathbb{V}$ não possui subespaços próprios, logo $\dim(\mathbb{V}) = 1$.

Então U é unidimensional, donde segue o resultado.

■

Teorema 1.4.3 (Lema de Schur - 2º forma) *Sejam $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ e $V : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{W})$ duas representações irredutíveis e seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ tal que*

$$TU(g) = V(g)T \quad \forall g \in G. \tag{I}$$

Então ou $T \equiv 0$, ou U e V são unitariamente equivalentes e, ainda, T é única a menos de uma constante.

Prova Tomando a igualdade $TU(g) = V(g)T$ para g^{-1} temos que

$$\begin{aligned} TU(g^{-1}) = V(g^{-1})T \implies & \quad TU^*(g) = V^*(g)T \\ \implies & \quad U(g)T^* = T^*V(g). \end{aligned} \tag{II}$$

De I e II temos

$$T^*TU(g) = T^*V(g)T = U(g)T^*T \quad \forall g \in G.$$

Portanto existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T^*T = \lambda I_{\mathbb{V}}$ (pelo Lema de Schur - 1º forma).

Por outro lado, de I temos que

$$U(g)T^* = T^*V(g) \implies TT^*V(g) = TU(g)T^* = V(g)T\ T^* \quad \forall g \in G.$$

Logo existe $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ tal que $TT^* = \lambda_1 I_{\mathbb{W}}$ (pelo Lema de Schur - 1º forma).

Note que $\lambda,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}$, pois

$$\overline{\lambda} I_{\mathbb{V}} = (T^*T)^* = T^*T = \lambda I_{\mathbb{V}} \implies \overline{\lambda} = \lambda.$$

Analogamente tem-se que $\overline{\lambda_1} = \lambda_1$.

Agora, observe que

$$\lambda^2 I_{\mathbb{V}} = T^*TT^*T = T^*(\lambda_1 I_{\mathbb{W}})T = \lambda_1 T^*T = \lambda_1 \lambda I_{\mathbb{V}}.$$

Portanto, temos 2 casos possíveis:

- $\lambda = 0$: Sabemos que

$$\lambda_1^2 I_{\mathbb{W}} = TT^*TT^* = T(\lambda I_{\mathbb{V}})T^* = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

Portanto $TT^* = 0 = T^*T$.

Tome $v \in \mathbb{V}$ arbitrário. Então, tem-se que

$$0 = \langle v, T^*T(v) \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = \|T(v)\|^2 \Longrightarrow T \equiv 0$$

- $\lambda = \lambda_1 \neq 0$, então

$$T^*T = \lambda I_{\mathbb{V}} \;\text{ e } TT^* = \lambda I_{\mathbb{W}}.$$

Defina $S = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} T$. Então

$$S^*S = I_{\mathbb{V}} \text{ e } SS^* = I_{\mathbb{W}} \Longrightarrow S \text{ unitário.}$$

Além disso, para todo $g \in G$

$$TU(g) = V(g)T \Longrightarrow SU(g) = V(g)S,$$

donde U e V são unitariamente equivalentes.

Note que além disto, provamos que $\mathbb{V} \simeq \mathbb{W}$.

Unicidade:
Suponha que exista $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ tal que

$$\tilde{T}U(g) = V(g)\tilde{T} \quad \forall g \in G.$$

Vamos mostrar que existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $T = \alpha \tilde{T}$.
Seja $g \in G$, arbitrário. De II e da 1ª forma do lema de Schur temos

$$\begin{aligned} \tilde{T}U(g) = V(g)\tilde{T} \quad & \Longrightarrow \quad T^*\tilde{T}U(g) = T^*V(g)\tilde{T} = U(g)T^*\tilde{T} \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow \quad T^*\tilde{T} = cI_{\mathbb{V}} \end{aligned}$$

Portanto

$$T = \frac{1}{c} TT^*\tilde{T} = \frac{\lambda_1}{c}\tilde{T}.$$

Tomando $\alpha = \dfrac{\lambda_1}{c}$, tem-se que

$$T = \alpha \tilde{T},$$

donde segue o resultado.

■

Nosso trabalho daqui em diante será encontrar representações unitárias irredutíveis que não sejam unitariamente equivalentes.

1.5 Produto tensorial

Dados dois espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ sobre $\mathbb{k}$, podemos construir um terceiro, denominado o *produto tensorial de* $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, denotado por $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$. Admitiremos que o leitor já é familiarizado com este conceito, logo estaremos apenas usando alguns resultados desta teoria sem apresentar aqui a demonstração destes. Para o leitor interessado em mais detalhes consultar no apêndice T de [6].

Dois fatos importantes que serão usados em nossas demonstrações desta teoria, é que se $\{e_i\}_{i=1}^{n}, \{e_j\}_{j=1}^{m}$ são bases de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, respectivamente, então $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j=1}^{m,n}$ será base de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$, e em particular caso $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ possuam dimensão finita, então $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ também o terá.

Teorema 1.5.1 *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços de Hilbert de dimensão finita e seja $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ o produto tensorial destes dois espaços, então podemos definir um produto interno em $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$.*

Prova Defina

$$\begin{array}{rcl} T : (\mathbb{V} \times \mathbb{W}) \times (\mathbb{V} \times \mathbb{W}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (v_1, w_1, v_2, w_2) & \longmapsto & \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{V}} \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{W}} \end{array}$$

Fixe $v_1 \in \mathbb{V}$, $w_1 \in \mathbb{W}$. Considere

$$\begin{array}{rcl} T_{v_1,w_1} : \mathbb{V} \times \mathbb{W} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (v, w) & \longmapsto & \langle v, v_1 \rangle_{\mathbb{V}} \langle w, w_1 \rangle_{\mathbb{W}} \end{array}$$

T_{v_1,w_1} é claramente bilinear.

Então, pela propriedade universal do produto tensorial, existe única

$$\overline{T}_{v_1,w_1} : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{C}$$

linear, tal que

$$\overline{T}_{v_1,w_1}(v \otimes w) = T_{v_1,w_1}(v, w) = \langle v, v_1 \rangle_{\mathbb{V}} \langle w, w_1 \rangle_{\mathbb{W}} \quad \forall (v, w) \in \mathbb{V} \times \mathbb{W}.$$

Defina

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T}_{v_1,w_1} : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a & \longmapsto & \widetilde{T}_{v_1,w_1}(a) \end{array}$$

onde $\widetilde{T}_{v_1,w_1}(a) = \overline{\overline{T}_{v_1,w_1}(a)}$. Então, $\widetilde{T}_{v_1,w_1}$ é antilinear, e

$$\widetilde{T}_{v_1,w_1}(v \otimes w) = \overline{\overline{T}_{v_1,w_1}(v \otimes w)} = \overline{T_{v_1,w_1}(v, w)} = \langle v_1, v \rangle_{\mathbb{V}} \langle w_1, w \rangle_{\mathbb{W}} \quad \forall (v, w) \in \mathbb{V} \times \mathbb{W}.$$

Fixe $a \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$, $a = \sum_{i=1}^{n} .v_i \otimes w_i$. Defina

$$\begin{array}{rcl} \widehat{T}_a : \mathbb{V} \times \mathbb{W} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (v, w) & \longmapsto & \widetilde{T}_{v,w}(a) \end{array}$$

Vamos provar que $\widehat{T}_a$ é bilinear.

Dados $v, v' \in \mathbb{V}$, $w, w' \in \mathbb{W}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, arbitrários temos:

$$\begin{aligned} \widehat{T}_a(v + \lambda v', w) &= \widetilde{T}_{v+\lambda v',w}(a) = \\ &= \widetilde{T}_{v+\lambda v',w}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{T}_{v+\lambda v',w}(v_i \otimes w_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle v + \lambda v', v_i \right\rangle_{\mathbb{V}} \langle w, w_i \rangle_{\mathbb{W}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle v, v_i \rangle_{\mathbb{V}} \langle w, w_i \rangle_{\mathbb{W}} + \lambda \left\langle v', v_i \right\rangle_{\mathbb{V}} \langle w, w_i \rangle_{\mathbb{W}} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle_{\mathbb{V}} \langle w, w_i \rangle_{\mathbb{W}} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \left\langle v', v_i \right\rangle_{\mathbb{V}} \langle w, w_i \rangle_{\mathbb{W}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{T}_{v,w}(v_i \otimes w_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \widetilde{T}_{v',w}(v_i \otimes w_i) = \\ &= \widetilde{T}_{v,w}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) + \lambda \widetilde{T}_{v',w}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) = \\ &= \widetilde{T}_{v,w}(a) + \lambda \widetilde{T}_{v',w}(a) = \\ &= \widehat{T}_a(v, w) + \lambda \widehat{T}_a(v', w). \end{aligned}$$

Similarmente temos que

$$\widehat{T}_a(v, w + \lambda w') = \widehat{T}_a(v, w) + \lambda \widehat{T}_a(v, w').$$

Portanto $\widehat{T}_a$ é bilinear, e assim pela propriedade universal do produto tensorial, existe única

$$T_a : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{C}$$

linear, tal que

$$T_a(v \otimes w) = \widehat{T}_a(v, w) = \widetilde{T}_{v,w}(a).$$

Defina

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : (\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})\times(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a,b) &\longmapsto T_b(a) \end{aligned}$$

Observe que, por construção,

$$\langle v_1\otimes w_1, v_2\otimes w_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{V}}\, \langle w_1, w_2\rangle_{\mathbb{W}}\,.$$

- $\langle\ ,\ \rangle$ é linear na primeira entrada.

  De fato, fixe $b\in\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$. Para $a, a'\in\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ e $\lambda\in\mathbb{C}$, arbitrários temos

$$\left\langle a+\lambda a', b\right\rangle = T_b(a+\lambda a') = {}^{1}T_b(a)+\lambda T_b(a') = \langle a,b\rangle + \lambda\left\langle a', b\right\rangle.$$

- $\langle\ ,\ \rangle$ é antilinear na segunda entrada.

  De fato, fixe $a=\sum_{i=1}^{n} v_i\otimes w_i\in\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$. Para $b, b'\in\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ e $\lambda\in\mathbb{C}$, arbitrários temos

$$\begin{aligned} \left\langle a, b+\lambda b'\right\rangle &= T_{b+\lambda b'}(a) = \\ &= T_{b+\lambda b'}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\otimes w_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} T_{b+\lambda b'}(v_i\otimes w_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{T}_{v_i,w_i}(b+\lambda b') = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{T}_{v_i,w_i}(b)+\overline{\lambda}\widetilde{T}_{v_i,w_i}(b')\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\widetilde{T}_{v_i,w_i}(b)+\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{T}_{v_i,w_i}(b') = \\ &= \sum_{i=1}^{n} T_b(v_i\otimes w_i)+\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n} T_{b'}(v_i\otimes w_i) = \\ &= T_b(a)+\overline{\lambda}T_{b'}(a) = \\ &= \langle a,b\rangle+\overline{\lambda}\left\langle a,b'\right\rangle. \end{aligned}$$

Logo, $\langle\ ,\ \rangle$ é sesquilinear. Provemos agora que $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno:
Sejam $v_1, v_2\in\mathbb{V}$, $w_1, w_2\in\mathbb{W}$ e $\lambda\in\mathbb{C}$, arbitrários. Então, temos que

1. Por construção $\langle\ ,\ \rangle$ é linear na primeira entrada.

[1] T_b é linear.

2.

$$\begin{aligned} \langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \rangle &= \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{V}} \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{W}} = \\ &= \overline{\langle v_2, v_1 \rangle_{\mathbb{V}} \langle w_2, w_1 \rangle_{\mathbb{W}}} = \\ &= \overline{\langle v_2 \otimes w_2, v_1 \otimes w_1 \rangle}. \end{aligned}$$

3. $\langle v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_1 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle_{\mathbb{V}} \langle w_1, w_1 \rangle_{\mathbb{W}} = \|v_1\|_{\mathbb{V}}^2 \|w_1\|_{\mathbb{W}}^2 \geq 0.$

$$\begin{aligned} \langle v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_1 \rangle = 0 &\iff \|v_1\|_{\mathbb{V}}^2 \|w_1\|_{\mathbb{W}}^2 = 0 \iff \\ &\iff \|v_1\|_{\mathbb{V}} = 0 \text{ ou } \|w_1\|_{\mathbb{W}} = 0 \iff \\ &\iff v_1 = 0 \text{ ou } w_1 = 0 \iff \\ &\iff v_1 \otimes w_1 = 0. \end{aligned}$$

Note que por $\langle\ ,\rangle$ ser sesquilinear basta provarmos $(1)-(3)$ para elementos do tipo $v \otimes w$, donde segue o resultado.

■

Note que com isto, acabamos de provar que $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ é um espaço de Hilbert de dimensão finita com o produto interno construído acima.

Proposição 1.5.2 *Sejam $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$, $V : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{W})$, representações de G, onde $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ são espaços de Hilbert de dimensão finita. Então*

$$\begin{aligned} U \otimes V : G &\longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) \\ g &\longmapsto (U \otimes V)(g) \end{aligned}$$

dada por

$$(U \otimes V)(g) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (U(g)v_i) \otimes (V(g)w_i) \quad \forall \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{W},$$

é uma representação de G.

Prova Primeiramente vamos provar que $(U \otimes V)(g)$ está bem definida para todo $g \in G$ e é linear.

Fixe $g \in G$. Defina

$$\begin{aligned} T : \mathbb{V} \times \mathbb{W} &\longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \\ (v, w) &\longmapsto (U(g)v) \otimes (V(g)w) \end{aligned}$$

que é claramente bilinear, logo pela propriedade universal do produto tensorial, existe única

$$\widetilde{T} : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$$

linear tal que

$$\widetilde{T}(v \otimes w) = T(v, w) = (U(g)v) \otimes (V(g)w) \quad \forall v \in \mathbb{V},\ \forall w \in \mathbb{W}.$$

é fácil ver que $(U \otimes V)(g)$ é exatamente a função $\widetilde{T}$, logo $(U \otimes V)(g)$ está bem definida e é linear.

Como $(U \otimes V)(g)$ é linear, basta verificarmos as próximas propriedades para elementos do tipo $v \otimes w$.

- $(U \otimes V)(g)$ é invertível para todo $g \in G$:

  Fixe $g \in G$. Então dado $v \otimes w$, temos que

$$\begin{aligned}
(U \otimes V)(g)(U \otimes V)(g^{-1})(v \otimes w) &= (U \otimes V)(g)\left(U(g^{-1})v \otimes V(g^{-1})w\right) = \\
&= U(g)U(g^{-1})v \otimes V(g)V(g^{-1})w = \\
&= v \otimes w.
\end{aligned}$$

  Analogamente temos

$$(U \otimes V)(g^{-1})(U \otimes V)(g)(v \otimes w) = v \otimes w.$$

  Provamos com isto que $(U \otimes V)(g) \in GL(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})\ \forall g \in G$.

- $U \otimes V$ é homomorfismo:

  Sejam $g, h \in G$ arbitrários. Então temos que

$$\begin{aligned}
(U \otimes V)(g)\left((U \otimes V)(h)(v \otimes w)\right) &= (U \otimes V)(g)\left[(U(h)v) \otimes (V(h)w)\right] = \\
&= (U(g)\left(U(h)v\right)) \otimes (V(g)\left(V(h)w\right)) = \\
&= (U(gh)v) \otimes (V(gh)w) = \\
&= (U \otimes V)\,(gh)(v \otimes w).
\end{aligned}$$

- $U \otimes V$ é representação unitária:

$$\begin{aligned}
\langle (U \otimes V)(g)(v_1 \otimes w_1), v_2 \otimes w_2 \rangle &= \langle (U(g)v_1) \otimes (V(g)w_1)\,, v_2 \otimes w_2 \rangle = \\
&= \langle U(g)v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{V}} \langle V(g)w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{W}} = \\
&= \left\langle v_1, U(g^{-1})v_2 \right\rangle_{\mathbb{V}} \left\langle w_1, V(g^{-1})w_2 \right\rangle_{\mathbb{W}} = \\
&= \left\langle v_1 \otimes w_1, \left(U(g^{-1})v_2\right) \otimes \left(V(g^{-1})w_2\right) \right\rangle = \\
&= \left\langle v_1 \otimes w_1, (U \otimes V)(g^{-1})(v_2 \otimes w_2) \right\rangle.
\end{aligned}$$

  Portanto,

$$\left((U \otimes V)\,(g)\right)^* = \left((U \otimes V)\,(g^{-1})\right) = \left((U \otimes V)\,(g)\right)^{-1},$$

logo $U \otimes V$ é unitário e assim $U \otimes V$ é representação unitária de G.

■

Definição 1.5.3 *$U \otimes V$ nas condições da proposição acima é chamada* representação produto tensorial de U *e* V.

Em geral, para $\alpha, \beta \in \widehat{G}$, se $W^{(\alpha)}$ e $V^{(\beta)}$ são representações irredutíveis de G, $W^{(\alpha)} \otimes V^{(\beta)}$ não é irredutível, mas é equivalente a uma soma direta dos irredutíveis $D^{(\gamma)}$, pelo teorema 1.2.6,

$$W^{(\alpha)} \otimes V^{(\beta)} \simeq \underset{\gamma \in \widehat{G}}{\oplus} \eta^{\gamma}_{\alpha\beta} D^{(\gamma)}.$$

Relembrando, $\left\{D^{\alpha}_{ij}\right\}^{\alpha \in \widehat{G}}_{ij=1,\ldots,d_\alpha} \subseteq \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$.

Defina $\mathcal{D} = span\left\{D^{\alpha}_{ij}\right\}^{\alpha \in \widehat{G}}_{ij=1,\ldots,d_\alpha}$ e

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathcal{D} \times \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{F}(G, \mathbb{C}) \\ \left(D^{\alpha}_{ij}, D^{\beta}_{kl}\right) & \longmapsto & D^{\alpha}_{ij} \cdot D^{\beta}_{kl} \end{array}$$

dada por

$$\left(D^{\alpha}_{ij} \cdot D^{\beta}_{kl}\right)(g) = D^{\alpha}_{ij}(g) D^{\beta}_{kl}(g) \quad \forall g \in G.$$

Teorema 1.5.4 $\mathrm{Im}(\cdot) \subseteq \mathcal{D}$, *ou seja,* $\forall g \in G,\ \forall \alpha, \beta \in \widehat{G},\ \forall i, j = 1, \ldots, d_\alpha,\ \forall k, l = 1, \ldots, d_\beta$ *existe* $C^{\alpha\beta\gamma}_{ij,kl,pq} \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$D^{\alpha}_{ij}(g) D^{\beta}_{kl}(g) = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \sum_{p,q=1}^{d_\gamma} C^{\alpha\beta\gamma}_{ij,kl,pq} D^{\gamma}_{pq}(g).$$

Prova Sejam

$$\begin{array}{rcl} D^{(\alpha)} & : & G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}^{(\alpha)}) \\ D^{(\beta)} & : & G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}^{(\beta)}) \end{array}$$

as representações irredutíveis fixadas no final da seção 1.2. Vamos considerar

$$D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)} : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}^{(\alpha)} \otimes \mathbb{V}^{(\beta)}).$$

Seja $\left\{e^{(\alpha)}_i\right\}^{d_\alpha}_{i=1}$ base ortonormal de $\mathbb{V}^{(\alpha)}$ e $\left\{e^{(\beta)}_j\right\}^{d_\beta}_{j=1}$ base ortonormal de $\mathbb{V}^{(\beta)}$.Conforme observado no início desta seção, $\left\{e^{(\alpha)}_i \otimes e^{(\beta)}_j\right\}^{d_\alpha, d_\beta}_{i,j=1}$ é base de $\mathbb{V}^{(\alpha)} \otimes \mathbb{V}^{(\beta)}$, e ela será ortonormal com respeito ao produto interno introduzido em $\mathbb{V}^{(\alpha)} \otimes \mathbb{V}^{(\beta)}$ pois

$$\left\langle e^{(\alpha)}_i \otimes e^{(\beta)}_j, e^{(\alpha)}_k \otimes e^{(\beta)}_l \right\rangle = \left\langle e^{(\alpha)}_i, e^{(\alpha)}_k \right\rangle_{\mathbb{V}^{(\alpha)}} \left\langle e^{(\beta)}_j, e^{(\beta)}_l \right\rangle_{\mathbb{V}^{(\beta)}} = \delta_{i,k} \delta_{l,j}.$$

Logo, fixando $g \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
\left(\left(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\right)(g)\right)_{ik,jl} &= \left\langle e_i^{(\alpha)} \otimes e_k^{(\beta)}, \left(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\right)(g)\left(e_j^{(\alpha)} \otimes e_l^{(\beta)}\right)\right\rangle = \\
&= \left\langle e_i^{(\alpha)} \otimes e_k^{(\beta)}, D^{(\alpha)}(g)\left(e_j^{(\alpha)}\right) \otimes D^{(\beta)}(g)\left(e_l^{(\beta)}\right)\right\rangle = \\
&= \left\langle e_i^{(\alpha)}, D^{(\alpha)}(g)\left(e_j^{(\alpha)}\right)\right\rangle_{\mathbb{V}^{(\alpha)}} \left\langle e_k^{(\beta)}, D^{(\beta)}(g)\left(e_l^{(\beta)}\right)\right\rangle_{\mathbb{V}^{(\beta)}} = \\
&= D_{ij}^{(\alpha)}(g) D_{kl}^{(\beta)}(g).
\end{aligned}$$

Por outro lado existe

$$W : \mathbb{V}^{(\alpha)} \otimes \mathbb{V}^{(\beta)} \longrightarrow \bigoplus_{\gamma \in \widehat{G}} \eta_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbb{V}^{(\gamma)}$$

unitário tal que, para todo $g \in G$,

$$\left(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\right)(g) = W \left(\bigoplus_{\gamma \in \widehat{G}} \eta_{\alpha\beta}^{\gamma} D^{(\gamma)}(g)\right) W^*.$$

W é matriz com coeficientes complexos, logo o produto matricial do lado direito da equação será tal que cada entrada da matriz produto será um combinação linear das entradas da matriz central.

Portanto

$$D_{ij}^{\alpha}(g) D_{kl}^{\beta}(g) = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \sum_{p,q=1}^{d_\gamma} C_{ij,kl,pq}^{\alpha\beta\gamma} D_{pq}^{\gamma}(g),$$

para $C_{ij,kl,pq}^{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{C}$ apropriados.

■

Este resultado nos diz que o conjunto das combinações lineares dos D_{ij}^{α} é uma álgebra, isto é, fechada no produto.

1.6 Representações unidimensionais

Definição 1.6.1 *Seja G um grupo, e $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão um sobre C ; uma* representação unidimensional do grupo G sobre o espaço vetorial $\mathbb{V}$ *é um homomorfismo de grupos $U : G \longrightarrow GL(\mathbb{V})$.*

Vimos pelo teorema 1.1.6 que dada uma representação U de G existe um produto interno em $\mathbb{V}$ tal que U é unitária relativa ao mesmo, mas no caso da representação ser unidimensional o espaço em questão possui dimensão igual a um, logo é isomorfo a $\mathbb{C}$. Vimos no exemplo 1.1.7 que $\mathbb{C}$ possui um único produto interno a menos de constante real positiva, dado por:

$$\langle z, w \rangle = z\overline{w}, \ \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Assim, podemos facilmente verificar sob quais condições as representações unidimensionais de G em $\mathbb{C}$ serão unitárias. Seja $\chi : G \longrightarrow GL(\mathbb{V})$ uma representação unidimensional de G sobre $\mathbb{V}$.

Da teoria de números complexos sabemos que o inverso de um número complexo $z \neq 0$ é dado por $\frac{\overline{Z}}{|Z|^2}$, logo para qualquer $g \in G$ temos

$$\chi(g^{-1}) = (\chi(g))^{-1} = \frac{\overline{\chi(g)}}{|\chi(g)|^2}.$$

Portanto para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ e $g \in G$, se o produto interno considerado em $\mathbb{C}$ é da forma $\langle z, w \rangle = cz\overline{w}$ para algum $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ temos

$$\begin{aligned} \langle \chi(g)z, \chi(g)w \rangle &= c\chi(g)z\overline{\chi(g)w} = c\chi(g)\overline{\chi(g)}z\overline{w} = c\chi(g)\chi(g^{-1})\,|\chi(g)|^2\, z\overline{w} = \\ &= c\chi(g^{-1}g)\,|\chi(g)|^2\, z\overline{w} = |\chi(g)|^2\, cz\overline{w} = |\chi(g)|^2 \langle z, w \rangle. \end{aligned}$$

Logo, χ representação de G em $\mathbb{C}$, será unitária se, e somente se, para qualquer $g \in G$ tem-se que $|\chi(g)|^2 = 1$, ou seja, $\chi : G \longrightarrow S^1$, onde $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. Com ligeiro abuso de linguagem, identificamos homomorfismos $\chi : G \longrightarrow S^1$ com representações unidimensionais unitárias.

Proposição 1.6.2 *Seja χ uma representação unidimensional unitária de G, e $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ uma representação irredutível de G, onde $\mathbb{V}$ é um espaço de Hilbert de dimensão finita, então*

$$\begin{aligned} \chi U : G &\longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}) \\ g &\longmapsto \chi U(g) \end{aligned}$$

dada por

$$\chi U(g)(v) := \chi(g)U(g)(v), \ \forall v \in \mathbb{V}$$

também é representação irredutível de G.

Prova Sejam $g, h \in G$ e $v, w \in \mathbb{V}$, arbitrários.

- χU está bem definida, pois pode ser vista como a seguinte composição:

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & (\mathbb{C}\setminus\{0\}) \times GL(\mathbb{V}) & \longrightarrow & GL(\mathbb{V}) \\ g & \longmapsto & (\chi(g), U(g)) & \longmapsto & \chi(g)U(g) \end{array}$$

- χU é homomorfismo:

$$\begin{aligned}
\chi U(g)\left(\chi U(h)\right)(v) &= \chi U(g)\left(\chi(h)U(h)(v)\right) = \\
&= \chi(h)\left[\chi U(g)\left(U(h)(v)\right)\right] = \\
&= \chi(h)\chi(g)U(g)\left(U(h)(v)\right) = \\
&= \chi(g)\chi(h)U(gh)(v) = \\
&= \chi(gh)U(gh)(v) = \\
&= \chi U(gh)(v).
\end{aligned}$$

- χU é unitário:

$$\begin{aligned}
\langle \chi U(g)v, w\rangle &= \langle \chi(g)U(g)v, w\rangle = \\
&= \chi(g)\left\langle U(g)v, w\right\rangle = \\
&= \left\langle v, \overline{\chi(g)}U(g^{-1})w\right\rangle = \\
&= \left\langle v, \chi(g^{-1})U(g^{-1})w\right\rangle = \\
&= \left\langle v, \chi U(g^{-1})w\right\rangle.
\end{aligned}$$

- χU é irredutível:

  U é irredutível, logo χU, que é um múltiplo de U para todo $g \in G$ também o será,

donde segue que χU é representação irredutível de G.

■

Teorema 1.6.3 *Seja G um grupo abeliano, então $\widehat{G_1}$ (o conjunto das representações unitárias unidimensionais) é grupo com a operação de multiplicação ponto a ponto.*

Prova Sejam $\chi, \psi \in \widehat{G_1}$ arbitrárias.

Pela proposição acima temos que

$$\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g) \in \widehat{G_1},\ \forall g \in G.$$

Logo, $\widehat{G_1}$ é fechado no produto ponto a ponto.

- Associatividade: o produto ponto a ponto é claramente associativo;

- Elemento neutro: defina

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}: G &\longrightarrow \mathbb{C} \\
g &\longmapsto 1
\end{aligned}$$

  $\mathbf{1}$ é claramente o elemento neutro do produto $\widehat{G_1}$.

- Inverso multiplicativo: Seja $\chi \in \widehat{G_1}$. Defina

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow S^1 \\ g &\longmapsto \overline{\chi(g)} \end{aligned}$$

  Note que ψ é homomorfismo e ainda para qualquer $g \in G$ temos

$$\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g) = \chi(g)\overline{\chi(g)} = \chi(g)\chi(g^{-1}) = \chi(e) = 1.$$

  Analogamente tem-se que $\psi\chi(g) = 1$, $\forall g \in G$.

  Portanto ψ é o inverso de χ,

donde segue que $\widehat{G_1}$ é grupo com a operação de multiplicação ponto a ponto.

■

Se G é abeliano, $\widehat{G} = \widehat{G_1}$ é um grupo, chamado de *dual do grupo G*, ou ainda, *dual de Pontryagin de G*.

Capítulo 2

Teoria abstrata de representações de grupos finitos

2.1 Relações de ortogonalidade

O resultado central desta seção será a prova de que

$$\sum_{\alpha \in \widehat{G}} d_\alpha^2 = \#(G). \tag{I}$$

Mostraremos primeiro que, a menos de normalizações, $\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\ldots,d_\alpha}^{\alpha \in \widehat{G}}$ é um conjunto ortonormal, isto é, para quaisquer $\alpha, \beta \in \widehat{G}$ temos

$$\frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} D_{ij}^{(\alpha)}(g) \overline{D_{kl}^{(\beta)}(g)} = \frac{1}{d_\alpha} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{i,k} \delta_{j,l},$$

e portanto (visto que $\#(G) = \dim(\mathbb{C}G)$)

$$\sum_{\alpha \in \widehat{G}} d_\alpha^2 \leq \#(G)$$

e, em particular, $\#\left(\widehat{G}\right) < \infty$.

Ainda provaremos que $\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\ldots,d_\alpha}^{\alpha \in \widehat{G}}$ é completo, isto é, gera $\mathbb{C}G$, completando assim a prova de I.

Teorema 2.1.1 (Relações de ortogonalidade para elementos matriciais) *Seja $\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\ldots,d_\alpha}^{\alpha \in \widehat{G}}$ o conjunto dos elementos de matriz das representações irredutíveis de G. Então para quaisquer $\alpha, \beta \in \widehat{G}$ temos*

$$\frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} D_{ij}^{(\alpha)}(g) \overline{D_{kl}^{(\beta)}(g)} = \frac{1}{d_\alpha} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{i,k} \delta_{j,l}.$$

Prova Sejam $\alpha, \beta \in \widehat{G}$, arbitrários. Dado $B \in \mathcal{L}(\mathbb{V}^{(\alpha)}, \mathbb{V}^{(\beta)})$ defina

$$\widetilde{B} : \mathbb{V}^{(\alpha)} \longrightarrow \mathbb{V}^{(\beta)}$$

dada por

$$\widetilde{B} = \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} [D^{(\beta)}(g)]^* B D^{(\alpha)}(g).$$

$\widetilde{B}$ está bem definida, pois para cada $g \in G$ considere a seguinte composição

$$\mathbb{V}^{(\alpha)} \underset{D^{(\alpha)}(g)}{\longrightarrow} \mathbb{V}^{(\alpha)} \underset{B}{\longrightarrow} \mathbb{V}^{(\beta)} \underset{[D^{(\beta)}(g)]^*}{\longrightarrow} \mathbb{V}^{(\beta)}$$

Note que $\widetilde{B}$ é a soma de compostas do tipo $[D^{(\beta)}(g)]^* B D^{(\alpha)}(g)$ multiplicada por um escalar, a saber $\dfrac{1}{\#(G)}$.

Portanto, $\widetilde{B}$ está bem definida.

Agora tome $h \in G$ arbitrário, então temos que

$$\begin{aligned}
D^{(\beta)}(h)\widetilde{B} &= D^{(\beta)}(h) \left(\frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} [D^{(\beta)}(g)]^* B D^{(\alpha)}(g) \right) = \\
&= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} D^{(\beta)}(h) [D^{(\beta)}(g)]^* B D^{(\alpha)}(g) = \\
&= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} D^{(\beta)}(h) D^{(\beta)}(g^{-1}) B D^{(\alpha)}(g) = \\
&= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} D^{(\beta)}(hg^{-1}) B D^{(\alpha)}(g) = \\
&= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g' \in G} D^{(\beta)}((g')^{-1}) B D^{(\alpha)}(g'h) = \\
&= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g' \in G} D^{(\beta)}((g')^{-1}) B D^{(\alpha)}(g') D^{(\alpha)}(h) = \\
&= \left(\frac{1}{\#(G)} \sum_{g' \in G} [D^{(\beta)}(g')]^* B D^{(\alpha)}(g') \right) D^{(\alpha)}(h) = \\
&= \widetilde{B} D^{(\alpha)}(h),
\end{aligned}$$

onde na quinta igualdade escrevemos $g' = gh^{-1}$. Portanto, para qualquer $h \in G$ temos

$$D^{(\beta)}(h)\widetilde{B} = \widetilde{B} D^{(\alpha)}(h).$$

Pela 1ª forma do Lema de Schur $\widetilde{B} = \lambda Id$ se $\alpha = \beta$ e pela 2ª forma do Lema de Schur $\widetilde{B} = 0$ se $\alpha \neq \beta$. Então

$$\widetilde{B} = \lambda \delta_{\alpha,\beta} Id.$$

Note que

$$Tr(\widetilde{B}) = \lambda \delta_{\alpha,\beta} d_\alpha \Longrightarrow \lambda = \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{d_\alpha} Tr(\widetilde{B}).$$

Logo quando $\alpha = \beta$, temos que

$$\begin{aligned} Tr(\widetilde{B}) &= Tr\left(\frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}[D^{(\alpha)}(g)]^* B D^{(\alpha)}(g)\right) = \\ &= Tr\left(\frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}D^{(\alpha)}(g^{-1}) B D^{(\alpha)}(g)\right) = \\ &= Tr\left(\frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}[D^{(\alpha)}(g)]^{-1} B D^{(\alpha)}(g)\right) = \\ &= Tr(B). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\widetilde{B} = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha,\beta} Tr(B) Id.$$

Logo,

$$(\widetilde{B})_{lj} = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha,\beta} Tr(B)\delta_{l,j}. \tag{I}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (\widetilde{B})_{lj} &= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}\sum_{p=1}^{d_\alpha}\sum_{q=1}^{d_\beta}\left[D^{(\beta)}_{lp}(g)\right]^* B_{pq} D^{(\alpha)}_{qj}(g) = \\ &= \frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G}\sum_{p=1}^{d_\alpha}\sum_{q=1}^{d_\beta}\overline{D^{(\beta)}_{pl}(g)} B_{pq} D^{(\alpha)}_{qj}(g). \end{aligned} \tag{II}$$

Fixando k, i tome B transformação linear tal que

$$B_{pq} = \delta_{p,k}\delta_{q,i}.$$

Então,

$$Tr(B) = \delta_{k,i}. \tag{III}$$

Logo, juntando I, II e III,

$$\frac{1}{\#(G)}\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}_{ij}(g)\overline{D^{\beta}_{kl}(g)} = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{i,k}\delta_{j,l}.$$

■

Então $\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\dots,d_\alpha}^{\alpha\in\widehat{G}}$ é um conjunto ortonormal de $\mathbb{C}G$. Logo temos que

$$\#\left(\{D_{ij}^{(\alpha)}\}\right) \leq \#(G) \Longrightarrow \sum_{\alpha\in\widehat{G}} d_\alpha^2 \leq \#(G).$$

Teorema 2.1.2 *Seja Y um conjunto finito e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(Y,\mathbb{C})$ uma sub-álgebra (com respeito a multiplicação ponto a ponto) que separa pontos, então $\mathcal{A} = \mathcal{F}(Y,\mathbb{C})$.*

Prova Seja $x \in Y$, arbitrário. Defina

$$\begin{array}{rcl} \delta_x : Y & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ y & \longmapsto & \delta_x(y) = \delta_{x,y} \end{array}$$

Note que $\{\delta_x\}_{x\in Y}$ gera $\mathcal{F}(Y,\mathbb{C})$, pois tome $f \in \mathcal{F}(Y,\mathbb{C})$, obviamente $f = \sum_{x\in Y} f(x)\delta_x$.
Vamos então mostrar que os geradores $\delta_x \in \mathcal{F}(Y,\mathbb{C})$ estão em $\mathcal{A}$.
Como $\mathcal{A}$ separa pontos para todo $y \neq x$ existe $f_{xy} \in \mathcal{A}$ tal que $f_{xy}(x) = 1$ e $f_{xy}(y) = 0$.
Agora tome $z \in Y$ qualquer. Então $\delta_x(z) = \delta_{xz}$. Observe que

$$\left(\prod_{y\neq x} f_{xy}\right)(z) = \prod_{y\neq x} f_{xy}(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z = x; \\ 0, & \text{se } z \neq x. \end{cases}$$

Logo, $\delta_x = \prod_{y\neq x} f_{xy}$, $\forall x \in Y$, donde segue que $\mathcal{A} = \mathcal{F}(Y,\mathbb{C})$.

■

Corolário 2.1.3 *A álgebra gerada por $\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\dots,d_\alpha}^{\alpha\in\widehat{G}}$ é igual a $\mathbb{C}G$.*

Prova $\mathcal{D}$ é sub-álgebra de $\mathbb{C}G$ e separa pontos pela proposição 1.3.22.
Logo, pelo teorema 2.1.2 $\mathcal{D} = \mathbb{C}G$.

■

Corolário 2.1.4 *$\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\dots,d_\alpha}^{\alpha\in\widehat{G}}$ é uma base de $\mathbb{C}G$.*

Prova $\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\dots,d_\alpha}^{\alpha\in\widehat{G}}$ é ortogonal e gera $\mathbb{C}G$.
Portanto é base.

■

Corolário 2.1.5 $\sum_{\alpha\in\widehat{G}} d_\alpha^2 = \#\left(G\right).$

Prova Já sabemos que

$$\sum_{\alpha\in\widehat{G}} d_\alpha^2 \leq \#\left(G\right).$$

Suponha

$$\sum_{\alpha \in \widehat{G}} d_\alpha^2 < \#\left(G\right).$$

Mas

$$\dim(\mathcal{D}) = \#\left(\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\ldots,d_\alpha}^{\alpha \in \widehat{G}}\right) = \sum_{\alpha \in \widehat{G}} d_\alpha^2$$

e

$$\#(G) = \dim(\mathbb{C}G).$$

Então temos que

$$\dim(\mathcal{D}) < \dim(\mathbb{C}G) \Longrightarrow \mathcal{D} \neq \mathbb{C}G.$$

O que é um absurdo, já que $\mathcal{D} = \mathbb{C}G$.

Portanto,

$$\sum_{\alpha \in \widehat{G}} d_\alpha^2 = \#(G).$$

■

Corolário 2.1.6 *Se G é abeliano então $\#\left(\widehat{G}\right) = \#(G)$.*

Prova Pelo corolário 1.4.2, cada $\alpha \in \widehat{G}$ tem $d_\alpha = 1$.

Logo,

$$\#(G) = \sum_{\alpha \in \widehat{G}} d_\alpha^2 = \#\left(\widehat{G}\right).$$

■

Agora fazendo uso dos corolário 2.1.5 e 2.1.6 podemos calcular as representações irredutíveis de grupos conhecidos por nós, o S_3 e o D_4.

Exemplo 2.1.7 *Como S_3 possui cardinalidade igual a 6 temos que ele possui uma representação unitária de ordem 2 e duas de ordem 1, pois a única outra possibilidade seria de todas elas possuirem ordem 1, mas isto implicaria no fato de S_3 ser abeliano, o que não é o caso. No exemplo 1.1.2 calculamos uma representação de ordem 2, logo basta encontrarmos as outras duas de ordem um. Uma delas será a representação trivial, ou seja, aquela que leva todos os elementos na identidade de $\mathbb{C}$. Portanto só nos resta encontrar mais uma. Defina*

$$\begin{array}{rcl} \chi_1 : S_3 & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ e & \longmapsto & 1 \\ \alpha & \longmapsto & 1 \\ \beta & \longmapsto & -1 \end{array}$$

Claramente χ_1 determinada por $\chi_1\left(\alpha\right)$ e $\chi_1\left(\beta\right)$ é uma representação irredutível de ordem 1 de S_3, donde segue que conseguimos encontrar todas as representações irredutíveis de S_3.

Note que qualquer que seja o grupo ele sempre terá pelo menos uma representação de dimensão um, a saber, a trivial.

Exemplo 2.1.8 *D_4 possui cardinalidade igual a 8, logo terá uma representação de ordem 2 e 4 de ordem 1, já que não é possível ter apenas duas de ordem igual a 2, e como D_4 não é abeliano fica descartada também a possibilidade de todas elas possuirem ordem 1.*

No exemplo 1.1.3 calculamos uma representação de ordem 2, logo como uma de ordem 1 será a trivial, resta-nos encontrarmos apenas outras 3 de ordem 1. Defina

$$\chi_i : D_4 \longrightarrow \{-1, 1\}, \ \ com\ i \in \{1, 2, 3\}$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\chi_1(e) &= 1,\ \chi_1(x) = 1 \ e\ \chi_1(y) = -1;\\
\chi_2(e) &= 1,\ \chi_2(x) = -1 \ e\ \chi_2(y) = 1;\\
\chi_3(e) &= 1,\ \chi_3(x) = -1 \ e\ \chi_3(y) = -1.
\end{aligned}$$

Claramente χ_i, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ determinada por $\chi_i(x)$ e $\chi_i(y)$ é uma representação irredutível de ordem 1 de D_4, Como $\chi_i(e) = 1$, para todo i elas não poderão ser unitariamente equivalentes. Logo encontramos todas as representações irredutíveis de D_4.

Exemplo 2.1.9 *Seja $G = \mathbb{Z}_p$, p primo. Então defina para $n \in \{0, \ldots, p-1\}$*

$$\begin{aligned}
\chi_n : \mathbb{Z}_p &\longrightarrow S^1\\
[k] &\longmapsto e^{\frac{2\pi i}{p}kn}
\end{aligned}$$

Claramente cada χ_n é uma representação de $\mathbb{Z}_p$. Note que elas não são unitariamente equivalentes, já que uma transformação unitária no plano complexo é uma rotação e dada duas quaisquer χ_n e χ_m elas não podem estar relacionadas por rotação.

Logo como $\mathbb{Z}_p$ é abeliano temos todas as suas representações irredutíveis.

Observe que dadas χ_n e χ_m quaisquer temos para qualquer $[k] \in \mathbb{Z}_p$ que

$$\chi_n\chi_m([k]) = e^{\frac{2\pi i}{p}kn}e^{\frac{2\pi i}{p}km} = e^{\frac{2\pi i}{p}k(n+m)} = \chi_{(m+n)(\mathrm{mod}\ \ p)}([k]).$$

Seja $\widehat{\mathbb{Z}_p}$ o dual de Pontryagin de $\mathbb{Z}_p$. Defina

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}_p}\\
[n] &\longrightarrow \varphi([n])
\end{aligned}$$

onde

$$\varphi([n]) = \chi_n.$$

- *φ está bem definida: Sejam $[n'], [n] \in \mathbb{Z}_p$ tais que $[n'] = [n]$. Então $n' - n = pk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.*

  Agora para qualquer $[l] \in \mathbb{Z}_p$ temos

$$\chi_{n'}([l]) = e^{\frac{2\pi i}{p} n' l} = e^{\frac{2\pi i}{p}(n+pk)l} = e^{\frac{2\pi i}{p} nl} e^{\frac{2\pi i}{p} kl} = e^{\frac{2\pi i}{p} nl} = \chi_n([l]),$$

  donde segue que $\chi_{n'} = \chi_n$. Logo

$$\varphi\left([n']\right) = \chi_{n'} = \chi_n = \varphi([n]).$$

  Portanto φ está bem definida.

- *φ é injetora: Sejam Sejam $[n'], [n] \in \mathbb{Z}_p$ tais que $[n'] = [n]$. Então $\chi_{n'} = \chi_n$. Logo, para qualquer $[l] \in \mathbb{Z}_p$ temos*

$$\begin{aligned} \chi_{n'}([l]) = \chi_n([l]) \implies & \ e^{\frac{2\pi i}{p} n' l} = e^{\frac{2\pi i}{p} nl} \implies \\ \implies & \ e^{\frac{2\pi i}{p}(n'-n)l} = 1 \implies \\ \implies & \ n' - n = 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

  Logo

$$\varphi\left([n']\right) = \varphi([n]).$$

- *φ é sobrejetora: Para cada χ_n temos*

$$\chi_n = \varphi([n]).$$

Portanto φ é um isomorfismo entre o dual de Pontryagin de $\mathbb{Z}_p$ e o próprio $\mathbb{Z}_p$.

Teorema 2.1.10 *Para cada $\alpha \in \widehat{G}$, $i, j \in \{1, \ldots, d_\alpha\}$ defina*

$$\begin{aligned} X_{ij}^{(\alpha)} : G & \longrightarrow \mathbb{C} \\ g & \longmapsto X_{ij}^{(\alpha)}(g) \end{aligned}$$

dada por

$$X_{ij}^{(\alpha)}(g) = \frac{d_\alpha}{\#(G)} D_{ij}^{(\alpha)}(g).$$

Então

$$X_{ij}^{(\alpha)} * X_{kl}^{(\beta)}(g) = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{j,k} X_{il}^{(\alpha)}.$$

Prova Seja $g \in G$, arbitrário. Então temos que

$$\begin{aligned}
X_{ij}^{(\alpha)} * X_{kl}^{(\beta)}(g) &= \sum_{h\in G} X_{ij}^{(\alpha)}(h) X_{kl}^{(\beta)}(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h\in G} \frac{d_\alpha}{\#(G)} D_{ij}^{(\alpha)}(h) \frac{d_\beta}{\#(G)} D_{kl}^{(\beta)}(h^{-1}g) = \\
&= \frac{d_\alpha d_\beta}{\#(G)^2} \sum_{h\in G} D_{kl}^{(\beta)}(h^{-1}g) D_{ij}^{(\alpha)}(h) = \\
&= \frac{d_\alpha d_\beta}{\#(G)^2} \sum_{p\in G} D_{kl}^{(\beta)}(p) D_{ij}^{(\alpha)}(gp^{-1}) = \\
&= \frac{d_\alpha d_\beta}{\#(G)^2} \sum_{p\in G} \sum_{m=1}^{d_\alpha} D_{kl}^{(\beta)}(p) D_{im}^{(\alpha)}(g) D_{mj}^{(\alpha)}(p^{-1}) = \\
&= \frac{d_\alpha d_\beta}{\#(G)} \sum_{m=1}^{d_\alpha} \left(\frac{1}{\#(G)} \sum_{p\in G} D_{kl}^{(\beta)}(p) \overline{D_{jm}^{(\alpha)}(p)} \right) D_{im}^{(\alpha)}(g) = \\
&= \frac{d_\alpha d_\beta}{\#(G)} \sum_{m=1}^{d_\alpha} \left(\frac{1}{d_\beta} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{k,j} \delta_{l,m} \right) D_{im}^{(\alpha)}(g) = \\
&= \frac{d_\alpha}{\#(G)} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{k,j} D_{il}^{(\alpha)}(g) = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{j,k} X_{il}^{(\alpha)}(g),
\end{aligned}$$

onde na quarta igualdade usamos $p = h^{-1}g$. Portanto,

$$X_{ij}^{(\alpha)} * X_{kl}^{(\beta)}(g) = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{j,k} X_{il}^{(\alpha)}.$$

∎

Como $\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\ldots,d_\alpha}^{(\alpha)}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{C}G$ e para cada $\alpha \in \widehat{G}$ e $X_{ij}^{(\alpha)} = \dfrac{d_\alpha}{\#(G)} D_{ij}^{(\alpha)}$, note que $\{X_{ij}^{(\alpha)}\}_{i,j=1,\ldots,d_\alpha}^{\alpha\in\widehat{G}}$ é também base ortogonal de $\mathbb{C}G$, visto que cada $X_{ij}^{(\alpha)}$ é um múltiplo não nulo de $D_{ij}^{(\alpha)}$, logo dados $a, b \in \mathbb{C}G$ podemos escrevê-los como uma combinação linear dos $X_{ij}^{(\alpha)}$, ou seja, $a = \sum_{\alpha\in\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} X_{ij}^{(\alpha)}$ e $b = \sum_{\beta\in\widehat{G}} \sum_{k,l=1}^{d_\beta} b_{kl}^{(\beta)} X_{kl}^{(\beta)}$, para algum $a_{ij}^{(\alpha)}, b_{kl}^{(\beta)} \in \mathbb{C}$.

Lema 2.1.11 *Dados $a, b \in \mathbb{C}G$, $a = \sum_{\alpha\in\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} X_{ij}^{(\alpha)}$ e $b = \sum_{\beta\in\widehat{G}} \sum_{k,l=1}^{d_\beta} b_{kl}^{(\beta)} X_{kl}^{(\beta)}$, arbitrários, temos que*

$$\langle a, b \rangle = \sum_{\alpha\in\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} \frac{d_\alpha}{\#(G)^2} a_{ij}^{(\alpha)} \overline{b_{ij}^{(\alpha)}}.$$

Prova

$$
\begin{aligned}
\langle a,b\rangle &= \left\langle \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)}X_{ij}^{(\alpha)}, \sum_{\beta\in\widehat{G}}\sum_{k,l=1}^{d_\beta} b_{kl}^{(\beta)}X_{kl}^{(\beta)} \right\rangle = \\
&= \sum_{\alpha,\beta\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\sum_{k,l=1}^{d_\beta} a_{ij}^{(\alpha)}\overline{b_{kl}^{(\beta)}}\left\langle X_{ij}^{(\alpha)}, X_{kl}^{(\beta)}\right\rangle = \\
&= \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha} \frac{d_\alpha}{\#(G)^2} a_{ij}^{(\alpha)}\overline{b_{ij}^{(\alpha)}}.
\end{aligned}
$$

■

Esta expressão nos ajudará em breve.

Teorema 2.1.12 (Peter-Weyl em dimensão finita) *Temos um $*-$isomorfismo entre as $*-$álgebras $\mathbb{C}G$ e $\underset{\alpha\in\widehat{G}}{\oplus}\mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})$ e o produto interno em $\mathbb{C}G$ induz em cada $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})$ um múltiplo do produto interno de Hilbert-Schmidt ($\langle A,B\rangle_{HS} = Tr(AB^*)$).*

Prova Defina

$$
\begin{aligned}
\hat{} : \mathbb{C}G &\longrightarrow \underset{\alpha\in\widehat{G}}{\oplus}\mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha}) \\
a &\longmapsto \widehat{a}
\end{aligned}
$$

dada por

$$
\left(\widehat{a}^{(\alpha)}\right)_{ij} = \frac{\#(G)}{d_\alpha}\sum_{g\in G}\overline{X_{ij}^{(\alpha)}(g)}a(g) = \sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}a(g) = \#(G)\left\langle a, D_{ij}^{(\alpha)}\right\rangle.
$$

Sejam $a,b\in\mathbb{C}G$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\alpha\in\widehat{G}$ e $i,j,k\in\{1,\ldots,d_\alpha\}$arbitrários.

- $\hat{}$ é linear:

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{a+\lambda b}^{(\alpha)}\right)_{ij} &= \sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}\,(a+\lambda b)(g) = \\
&= \sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}[a(g)+\lambda b(g)] = \\
&= \sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}a(g) + \lambda\sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}b(g) = \\
&= \left(\widehat{a}^{(\alpha)}\right)_{ij} + \lambda\left(\widehat{b}^{(\alpha)}\right)_{ij},
\end{aligned}
$$

donde segue que $\hat{}$ é linear.

- $\widehat{a*b} = \widehat{a}\widehat{b}$:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\widehat{a}\widehat{b}\right)^{(\alpha)}\right)_{ik} &= \sum_{j=1}^{d_\alpha}\left(\widehat{a}^{(\alpha)}\right)_{ij}\left(\widehat{b}^{(\alpha)}\right)_{jk} = \\
&= \sum_{j=1}^{d_\alpha}\left[\left(\sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}a(g)\right)\left(\sum_{h\in G}\overline{D_{jk}^{(\alpha)}(h)}b(h)\right)\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{d_\alpha}\sum_{g,h\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)D_{jk}^{(\alpha)}(h)}a(g)b(h) = \\
&= \sum_{g,h\in G}\overline{D_{ik}^{(\alpha)}(gh)}a(g)b(h) = \\
&= \sum_{g,l\in G}\overline{D_{ik}^{(\alpha)}(l)}a(g)b(g^{-1}l) = \\
&= \sum_{l\in G}\overline{D_{ik}^{(\alpha)}(l)}\,(a*b)\,(l) = \\
&= \left(\widehat{a*b}^{(\alpha)}\right)_{ik}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\widehat{a*b} = \widehat{a}\widehat{b}.$$

- $\widehat{a^*} = (\widehat{a})^* = \left(\overline{\widehat{a}}\right)^T$:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\widehat{a^*}\right)^{(\alpha)}\right)_{ij} &= \sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}a^*(g) = \\
&= \sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}\,\overline{a(g^{-1})} = \\
&= \sum_{g\in G}D_{ij}^{(\alpha)}(g^{-1})\overline{a(g^{-1})} = \\
&= \overline{\sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g^{-1})}a(g^{-1})} = \\
&= \left(\left(\overline{\widehat{a}}\right)^{(\alpha)}\right)_{ji} = \left(\left(\widehat{a}^{(\alpha)}\right)^*\right)_{ij},
\end{aligned}$$

donde

$$\widehat{a^*} = (\widehat{a})^*.$$

- $\widehat{\delta_e} = Id_{\oplus\mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})}$:

$$\left(\widehat{\delta_e}^{(\alpha)}\right)_{ij} = \sum_{g\in G}\overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)}\delta_e(g) = \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(e)} = \delta_{i,j}.$$

Logo

$$\widehat{\delta_e} = Id_{\oplus \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})}.$$

Portanto $\hat{}$ é um $*-$homomorfismo que preserva identidade.
Defina

$$\begin{array}{rcl} \sim : \underset{\alpha \in \widehat{G}}{\oplus} \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha}) & \longrightarrow & \mathbb{C}G \\ A & \longmapsto & \widetilde{A} \end{array}$$

dada por

$$\widetilde{A}(g) = \sum_{\alpha \in \widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} A_{ij}^{(\alpha)} X_{ij}^{(\alpha)}(g).$$

- $\hat{} \circ \sim = Id_{\oplus \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})}$: Sejam $A \in \underset{\alpha \in \widehat{G}}{\oplus} \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})$, $i, j \in \{1, \ldots, d_\alpha\}$, arbitrários. Então

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\widetilde{A}}^{(\alpha)}\right)_{ij} &= \sum_{g \in G} \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)} \widetilde{A}(g) = \\ &= \sum_{g \in G} \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)} \left(\sum_{\beta \in \widehat{G}} \sum_{k,l=1}^{d_\beta} A_{kl}^{(\beta)} X_{kl}^{(\beta)}(g) \right) = \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{\beta \in \widehat{G}} \sum_{k,l=1}^{d_\beta} \frac{d_\beta}{\#(G)} \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)} A_{kl}^{(\beta)} D_{kl}^{(\beta)}(g) = \\ &= \sum_{\beta \in \widehat{G}} d_\beta \sum_{k,l=1}^{d_\beta} A_{kl}^{(\beta)} \left(\frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)} D_{kl}^{(\beta)}(g) \right) = \\ &= \sum_{\beta \in \widehat{G}} d_\beta \sum_{k,l=1}^{d_\beta} A_{kl}^{(\beta)} \left(\frac{1}{d_\alpha} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{i,k} \delta_{j,l} \right) = \left(A^{(\alpha)}\right)_{ij}. \end{aligned}$$

$\therefore \widehat{\widetilde{A}} = A.$

- $\sim \circ \hat{} = Id_{\mathbb{C}G} = \delta_e$: Dado $a \in \mathbb{C}G$, $a = \sum_{\alpha \in \widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} D_{ij}^{(\alpha)}$, temos que

$$\begin{aligned} (\sim \circ \hat{})(a) &= \left(\sim \left[\left[\#(G) \left\langle a, D_{kl}^{(\beta)} \right\rangle \right]_{kl} \right]_{\beta \in \widehat{G}} \right) = \\ &= \sum_{\beta \in \widehat{G}} \frac{d_\beta}{\#(G)} \sum_{k,l=1}^{d_\beta} \#(G) \left\langle a, D_{kl}^{(\beta)} \right\rangle D_{kl}^{(\beta)} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\beta \in \widehat{G}} d_\beta \sum_{k,l=1}^{d_\beta} \frac{a_{kl}^{(\beta)}}{d_\beta} D_{kl}^{(\beta)} = \\
&= \sum_{\beta \in \widehat{G}} \sum_{k,l=1}^{d_\beta} a_{kl}^{(\beta)} D_{kl}^{(\beta)} = a.
\end{aligned}
$$

$\therefore \widetilde{\widehat{a}} = a.$

$\therefore$ $\hat{}$ é um $*-$isomorfismo.

Agora vamos provar que o produto interno em $\mathbb{C}G$ induz em cada $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})$ um múltiplo do produto interno de Hilbert-Schmidt $\left(\langle A, B \rangle_{HS} = Tr\,(AB^*)\right)$.

Dados $A, B \in \bigoplus_{\alpha \in \widehat{G}} \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})$ temos que $A = \widehat{a}$, $B = \widehat{b}$, para algum $a, b \in \mathbb{C}G$.

Defina

$$\langle A, B \rangle := \langle a, b \rangle .$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\iota_\alpha : \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha}) &\longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \widehat{G}} \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha}) \\
A &\longmapsto \Bigg(0, \ldots, 0, \underbrace{A}_{\alpha-ésima\ entrada}, 0, \ldots, 0\Bigg)
\end{aligned}
$$

é um $*-$homomorfismo e $\iota_\alpha\left(\mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})\right)$ é um subespaço vetorial de $\bigoplus_{\alpha \in \widehat{G}} \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})$.

Defina

$$
\begin{aligned}
\langle\ ,\ \rangle_\alpha : \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha}) \times \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\
(A, B) &\longmapsto \langle \iota_\alpha(A), \iota_\alpha(B) \rangle
\end{aligned}
$$

Tome $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\gamma})$, $\gamma \in \widehat{G}$, arbitrários. Então $\iota_\gamma(A), \iota_\gamma(B) \in \bigoplus_{\alpha \in \widehat{G}} \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha})$. Logo $\iota_\gamma(A) = \widehat{a}$ e $\iota_\gamma(B) = \widehat{b}$, para algum $a, b \in \mathbb{C}G$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}^{(\alpha)} &= \begin{cases} A, \text{ se } \alpha = \gamma; \\ 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha}), \text{ se } \alpha \neq \gamma. \end{cases} \\
\widehat{b}^{(\alpha)} &= \begin{cases} B, \text{ se } \alpha = \gamma; \\ 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\alpha}), \text{ se } \alpha \neq \gamma. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Então temos

$$\langle A, B \rangle_\gamma = \langle \iota_\gamma(A), \iota_\gamma(B) \rangle = \left\langle \widehat{a}, \widehat{b} \right\rangle = \langle a, b \rangle$$

Mas pelo lema 2.1.11 temos que

$$\langle a,b\rangle = \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\frac{d_\alpha}{\#\left(G\right)^2}a_{ij}^{(\alpha)}\overline{b_{ij}^{(\alpha)}}.$$

Note que

$$\widehat{a} = \widehat{\left(\sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}a_{ij}^{(\alpha)}X_{ij}^{(\alpha)}\right)} = \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\left(\widehat{a_{ij}^{(\alpha)}X_{ij}^{(\alpha)}}\right) = \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}a_{ij}^{(\alpha)}\widehat{X_{ij}^{(\alpha)}}.$$

Como

$$X_{ij}^{(\alpha)} = \frac{d_\alpha}{\#\left(G\right)}D_{ij}^{(\alpha)} \;\text{ e }\; \left(\widehat{D_{kl}^{(\beta)}}^{(\alpha)}\right)_{ij} = \#\left(G\right)\left\langle D_{kl}^{(\beta)},D_{ij}^{(\alpha)}\right\rangle = \frac{\#\left(G\right)}{d_\beta}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{k,i}\delta_{l,j}$$

temos

$$\left(\widehat{X_{kl}^{(\beta)}}^{(\alpha)}\right)_{ij} = \frac{d_\beta}{\#\left(G\right)}\left(\widehat{D_{kl}^{(\beta)}}^{(\alpha)}\right)_{ij} = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{k,i}\delta_{l,j}.$$

Portanto

$$\left(\widehat{a}^{(\alpha)}\right)_{ij} = \sum_{\alpha,\beta\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\sum_{k,l=1}^{d_\beta}a_{kl}^{(\beta)}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{k,i}\delta_{l,j} = \sum_{i,j=1}^{d_\alpha}a_{ij}^{(\alpha)},$$

donde

$$\sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\frac{d_\alpha}{\#\left(G\right)^2}a_{ij}^{(\alpha)}\overline{b_{ij}^{(\alpha)}} = \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\frac{d_\alpha}{\#\left(G\right)^2}\left(\widehat{a}^{(\alpha)}\right)_{ij}\overline{\left(\widehat{b}^{(\alpha)}\right)_{ij}}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle A,B\rangle_\gamma = \langle a,b\rangle &= \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\frac{d_\alpha}{\#\left(G\right)^2}\left(\widehat{a}^{(\alpha)}\right)_{ij}\overline{\left(\widehat{b}^{(\alpha)}\right)_{ij}} = \\
&= \sum_{i,j=1}^{d_\gamma}\frac{d_\gamma}{\#\left(G\right)^2}\left(\widehat{a}^{(\gamma)}\right)_{ij}\left[b^{(\gamma)}\right]_{ji}^* = \\
&= \frac{d_\gamma}{\#\left(G\right)^2}\sum_{i=1}^{d_\gamma}\sum_{j=1}^{d_\gamma}A_{ij}B_{ji}^* = \\
&= \frac{d_\gamma}{\#\left(G\right)^2}\sum_{i=1}^{d_\gamma}\left(AB^*\right)_{ii} = \\
&= \frac{d_\gamma}{\#\left(G\right)^2}Tr(AB^*) = \frac{d_\gamma}{\#\left(G\right)^2}\langle A,B\rangle_{HS},
\end{aligned}$$

donde segue o resultado.

$\blacksquare$

2.2 Caracteres, funções de classe e classes de conjugação

Um dos nosso objetivos nesta seção é mostrar que

$$\#\left(\widehat{G}\right) = \#\left(\mathcal{C}\right),$$

onde $\mathcal{C}$ denota o conjunto de classes de conjugação de G.

Definição 2.2.1 *Uma* função de classe sobre G *é uma função* $a : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que para quaisquer* $g, h \in G$

$$a(ghg^{-1}) = a(g).$$

Denotaremos por $\mathcal{Z}(G)$ *o conjunto das funções de classe sobre* G.

Proposição 2.2.2 *As funções de classe são constantes nas classes de conjugação e*

$$\dim(\mathcal{Z}(G)) = \#\left(\mathcal{C}\right).$$

Prova Sejam $C_1, \ldots, C_l$ as classes de conjugação de G (o número de classes de conjugação é finito já que G é finito). Sabemos que $G = \overset{l}{\underset{i=1}{\cup}} C_i$, onde esta união é disjunta.

Seja $C_k \in \{C_1, \ldots, C_l\}$, arbitrário. Agora tomes um representante de C_k, denote-o por g, obviamente este $g \in G$. Então

$$C_k = \{hgh^{-1} : h \in G\}.$$

Suponha que $\overline{g}, \overline{h} \in C_k$, então existem $h_1, h_2 \in G$ tais que $\overline{g} = h_1 g h_1^{-1}$ e $\overline{h} = h_2 g h_2^{-1}$.

Se $a \in \mathcal{Z}(G)$

$$a(\overline{g}) = a(h_1 g h_1^{-1}) = a(g) = a(h_2 g h_2^{-1}) = a(\overline{h}).$$

Portanto, as funções de classe são constantes nas classes de conjugação de G, já que C_k foi tomado arbitrário.

Logo dada $a \in \mathcal{Z}(G)$ qualquer, ela está unicamente determinada se conhecermos os seus valores em cada classe de G, donde segue que $\mathcal{Z}(G)$ pode ser visto como um subespaço de $\mathbb{C}^{\#(C)}$.

Agora para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$ considere a seguinte funções

$$\begin{array}{rcl} f_i : G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & f_i(g) \end{array}$$

dada por

$$f_i(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g \in C_i \\ 0, & \text{se } x \notin C_i \end{cases}$$

Claramente $\{f_i\}_{i=1}^{l} \subseteq \mathcal{Z}(G)$.

Note que $\{f_i\}_{i=1}^{l}$ é um conjunto linearmente independente pois, considere para cada $g \in G$ a seguinte relação

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i f_i(g) = 0.$$

Sabemos que g pertence a uma, e somente uma, classe de conjugação de G, então existe $j \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $f_j(g) = 1$, logo

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i f_i(g) = \alpha_j f_j(g) = \alpha_j = 0.$$

Desta forma temos que $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Portanto,

$$\dim(\mathcal{Z}(G)) = \#(\mathcal{C}).$$

■

Proposição 2.2.3 $\mathcal{Z}(G) = \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$,*onde* $\mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$ *é o centro da* C^**-álgebra* $\mathbb{C}G$*, isto é,* $a \in \mathcal{Z}(G)$ *se, e só se, para qualquer* $b \in \mathbb{C}G$

$$a * b = b * a.$$

Prova Seja $a \in \mathcal{Z}(G)$. Então para qualquer $b \in \mathbb{C}G$, $g \in G$ temos que

$$\begin{aligned} a * b(g) &= \sum_{h \in G} a(h) b(h^{-1}g) = \\ &= \sum_{h \in G} a(g^{-1}hg) b(h^{-1}g) = \\ &= \sum_{l \in G} b(l) a(l^{-1}g) = b * a(g). \end{aligned}$$

Logo $a \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$.

Portanto $\mathcal{Z}(G) \subseteq \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$.

Agora, seja $a \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$, arbitrário. Note que para quaisquer $g, h \in G$

$$\begin{aligned} \left[\delta_{g^{-1}} * (a * \delta_g)\right](h) &= \sum_{l \in G} \delta_{g^{-1}}(l)(a * \delta_g)(l^{-1}h) = \\ &= a * \delta_g(gh) = \\ &= \sum_{l \in G} a(l) \delta_g(l^{-1}gh) = \\ &= a(ghg^{-1}). \end{aligned}$$

Como $a \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$

$$\begin{aligned} a(ghg^{-1}) &= \left[\delta_{g^{-1}} * a * \delta_g\right](h) = \\ &= \left[a * \delta_{g^{-1}} * \delta_g\right](h) = \\ &= \sum_{l \in G} (a * \delta_{g^{-1}})(l)\delta_g(l^{-1}h) = \\ &= a * \delta_{g^{-1}}(hg^{-1}) = \\ &= \sum_{l \in G} a(l)\delta_{g^{-1}}(l^{-1}hg^{-1}) = a(h). \end{aligned}$$

Logo $a \in \mathcal{Z}(G)$, donde $\mathrm{Z}(\mathbb{C}G) \subseteq \mathcal{Z}(G)$.
Portanto

$$\mathcal{Z}(G) = \mathrm{Z}(\mathbb{C}G).$$

■

Definição 2.2.4 *Dada qualquer representação $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ de G, defina*

$$\begin{aligned} \chi_U : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \chi(g) \end{aligned}$$

dada por

$$\chi(g) = Tr(U(g)).$$

χ *é dita o* caracter de U.

Proposição 2.2.5 *Cada χ_U é uma função de classe sobre G.*

Prova Seja χ um caracter arbitrário. Então existe U representação de G associada a ela. Para quaisquer $g, h \in G$ temos

$$\begin{aligned} \chi(ghg^{-1}) &= Tr(U(ghg^{-1})) = \\ &= Tr(U(g)U(h)U(g^{-1})) = \\ &= Tr(U(g)U(h)\left[U(g)\right]^{-1}) = \\ &= Tr(U(h)) = \chi(h). \end{aligned}$$

Como χ foi tomada arbitrariamente, toda χ é uma função de classe sobre G.

■

Definição 2.2.6 *Para cada $a \in \widehat{G}$ defina*

$$\begin{aligned} \chi^{(\alpha)} : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \chi^{(\alpha)}(g) \end{aligned}$$

dada por

$$\chi^{(\alpha)}(g) := Tr(D^{(\alpha)}(g)).$$

$\chi^{(\alpha)}$ *é chamado* caracter irredutível de $D^{(\alpha)}$.

Note que, em particular, cada caracter irredutível é um caracter, logo pela proposição 2.2.5 os caracteres irredutíveis também são funções de classe sobre G.

Teorema 2.2.7 $\left\{\chi^{(\alpha)}\right\}_{\alpha\in\widehat{G}}$ *é uma base ortonormal para* $\mathcal{Z}(G)$.

Prova Sejam $\alpha, \beta \in \widehat{G}$, arbitrários. Então

$$\begin{aligned}
\left\langle \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)} \right\rangle &= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g\in G} \chi^{(\alpha)}(g)\overline{\chi^{(\beta)}(g)} = \\
&= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\beta} D_{ii}^{(\alpha)}(g)\overline{D_{jj}^{(\alpha)}(g)} = \\
&= \sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\beta} \left(\frac{1}{\#(G)} \sum_{g\in G} D_{ii}^{(\alpha)}(g)\overline{D_{jj}^{(\alpha)}(g)} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\beta} \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{i,j}\delta_{i,j} = \\
&= \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha,\beta}\sum_{i=1}^{d_\alpha}\delta_{i,i} = \delta_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

$\therefore \left\{\chi^{(\alpha)}\right\}_{\alpha\in\widehat{G}}$ é um conjunto ortonormal.
Agora vamos provar que $\left\{\chi^{(\alpha)}\right\}_{\alpha\in\widehat{G}}$ gera $\mathcal{Z}(G)$.
Seja $a \in \mathcal{Z}(G)$, arbitrário. Para qualquer $g \in G$ temos

$$\begin{aligned}
a(g) &= \frac{1}{\#(G)} \sum_{h\in G} a(hgh^{-1}) = \\
&= \frac{1}{\#(G)} \sum_{h\in G}\sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} D_{ij}^{(\alpha)}(hgh^{-1}) = \\
&= \frac{1}{\#(G)} \sum_{h\in G}\sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} \sum_{k,l=1}^{d_\alpha} D_{ik}^{(\alpha)}(h)D_{kl}^{(\alpha)}(g)D_{lj}^{(\alpha)}(h^{-1}) = \\
&= \frac{1}{\#(G)} \sum_{h\in G}\sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\sum_{k,l=1}^{d_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} D_{ik}^{(\alpha)}(h)D_{kl}^{(\alpha)}(g)\overline{D_{jl}^{(\alpha)}(h)} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\sum_{k,l=1}^{d_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\#\,(G)}\sum_{h\in G}D_{ik}^{(\alpha)}(h)\overline{D_{jl}^{(\alpha)}(h)}\right)D_{kl}^{(\alpha)}(g) = \\
&= \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}\sum_{k,l=1}^{d_\alpha} \frac{a_{ij}^{(\alpha)}}{d_\alpha}\delta_{i,j}\delta_{k,l}D_{kl}^{(\alpha)}(g) = \\
&= \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i=1}^{d_\alpha}\frac{a_{ii}^{(\alpha)}}{d_\alpha}\sum_{k=1}^{d_\alpha}D_{kk}^{(\alpha)}(g) = \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\sum_{i=1}^{d_\alpha}\frac{a_{ii}^{(\alpha)}}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}(g).
\end{aligned}
$$

Ou seja, a é combinação linear das χ_s', donde segue que $\{\chi^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\widehat{G}}$ gera $\mathcal{Z}(G)$. Portanto $\{\chi^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\widehat{G}}$ é base ortonormal para $\mathcal{Z}(G)$.

■

Corolário 2.2.8 $\#\left(\widehat{G}\right) = \#\,(\mathcal{C})\,.$

Prova De fato,

$$\#\,(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{Z}(G)) = \#\left(\widehat{G}\right).$$

■

Note que do fato de $\{\chi^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\widehat{G}}$ ser uma base ortonormal para $\mathcal{Z}(G)$, cada caracter χ poderá ser escrita como uma combinação linear dos $\{\chi^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\widehat{G}}$, já que pela proposição 2.2.5 cada χ é uma função de classe; mas será que podemos afirmar algo sobre os coeficientes desta combinação linear? Para responder a esta pergunta, seja χ um caracter arbitrário, e $U = W\left(\underset{\alpha\in\widehat{G}}{\oplus}\eta_\alpha D^{(\alpha)}(g)\right)W^{-1}$ uma representação de G associada a χ. Então para cada $g\in G$

$$
\begin{aligned}
\chi(g) &= Tr(U(g)) = Tr\left(W\left(\underset{\alpha\in\widehat{G}}{\oplus}\eta_\alpha D^{(\alpha)}(g)\right)W^{-1}\right) = \\
&= \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\eta_\alpha Tr(D^{(\alpha)}(g)) = \\
&= \sum_{\alpha\in\widehat{G}}\eta_\alpha \chi^{(\alpha)}(g).
\end{aligned}
$$

Como g é arbitrário temos que

$$\chi = \sum_{a\in\widehat{G}}\eta_\alpha\chi^{(\alpha)},$$

de onde os coeficientes da combinação são números naturais.

Proposição 2.2.9 *Duas representações* $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}_1)$, $V : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}_2)$ *são equivalentes se, e só se, seus caracteres são iguais.*

Prova ($\Rightarrow$) Sejam $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}_1),\ V : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}_2)$ duas representações equivalentes de G e χ_U, χ_V seus respectivos caracteres.

Como U e V são equivalentes sabemos que existe $W \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_1)$ tal que para qualquer $g \in G$ temos que

$$U(g) = WV(g)W^{-1}.$$

Então

$$\chi_U(g) = Tr(U(g)) = Tr(WV(g)W^{-1}) = Tr(V(g)) = \chi_V(g).$$

Portanto os caracteres de U e V são iguais, já que g foi tomado arbitrariamente.

($\Leftarrow$) Sejam $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}_1)$, $V : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V}_2)$ duas representações de G e χ_U, χ_V seus respectivos caracteres tais que $\chi_U = \chi_V$.

Sabemos que toda representação de G é equivalente a uma soma direta das representações irredutíveis de G, então existem $W \in L\left(\bigoplus_{a\in\widehat{G}} \eta_\alpha \mathbb{V}^{(\alpha)}, \mathbb{V}_1\right)$, $T \in L\left(\bigoplus_{a\in\widehat{G}} \mu_\alpha \mathbb{V}^{(\alpha)}, \mathbb{V}_2\right)$ tais que

$$U = W\left(\bigoplus_{a\in\widehat{G}} \eta_\alpha D^{(\alpha)}\right)W^{-1} \text{ e } V = T\left(\bigoplus_{a\in\widehat{G}} \mu_\alpha D^{(\alpha)}\right)T^{-1}.$$

Mas $\chi_U = Tr(U) = \sum_{\alpha\in\widehat{G}} \eta_\alpha \chi^{(\alpha)}$, $\chi_V = Tr(V) = \sum_{\alpha\in\widehat{G}} \mu_\alpha \chi^{(\alpha)}$ e como $\chi_U = \chi_V$ temos que

$$\chi_U - \chi_V = \sum_{\alpha\in\widehat{G}} (\eta_\alpha - \mu_\alpha)\, \chi^{(\alpha)} = 0.$$

Como $\{\chi^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\widehat{G}}$ é um conjunto linearmente independente pelo teorema 2.2.7

$$\eta_\alpha = \mu_\alpha,\ \forall \alpha \in \widehat{G}.$$

Então

$$V = T\left(\bigoplus_{a\in\widehat{G}} \eta_\alpha D^{(\alpha)}\right)T^{-1} \Longrightarrow T^{-1}VT = \left(\bigoplus_{a\in\widehat{G}} \eta_\alpha D^{(\alpha)}\right).$$

Logo

$$\begin{aligned} U = W\left(\bigoplus_{a\in\widehat{G}} \eta_\alpha D^{(\alpha)}\right)W^{-1} \quad &\Longrightarrow \quad U = WT^{-1}VTW^{-1} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \left(WT^{-1}\right)V\left(WT^{-1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto U e V são representações equivalentes.

■

Teorema 2.2.10 *Sejam $\alpha, \beta \in \widehat{G}$ quaisquer. Então*

$$\chi^{(\alpha)} * \chi^{(\beta)} = \delta_{\alpha,\beta} \frac{\#(G)}{d_\alpha} \chi^{(\alpha)}.$$

Em particular, para qualquer $g \in G$

$$\sum_{h\in G} \chi^{(\alpha)}(gh^{-1})\chi^{(\alpha)}(h) = \frac{\#(G)}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}(g).$$

Prova Sejam $\alpha, \beta \in \widehat{G}$, $g \in G$, quaisquer. Então

$$\begin{aligned}
\chi^{(\alpha)} * \chi^{(\beta)}(g) &= \sum_{h\in H} \chi^{(\alpha)}(h)\chi^{(\beta)}(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h\in H}\sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j=1}^{d_\beta} D_{ii}^{(\alpha)}(h) D_{jj}^{(\beta)}(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h\in H}\sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j,k=1}^{d_\beta} D_{ii}^{(\alpha)}(h) D_{jk}^{(\beta)}(h^{-1}) D_{kj}^{(\beta)}(g) = \\
&= \frac{\#(G)}{\#(G)}\sum_{h\in H}\sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j,k=1}^{d_\beta} D_{ii}^{(\alpha)}(h) \overline{D_{kj}^{(\beta)}(h)} D_{kj}^{(\beta)}(g) = \\
&= \#(G)\sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j,k=1}^{d_\beta} \left(\frac{1}{\#(G)}\sum_{h\in H} D_{ii}^{(\alpha)}(h)\overline{D_{kj}^{(\beta)}(h)}\right) D_{kj}^{(\beta)}(g) = \\
&= \#(G)\sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{j,k=1}^{d_\beta} \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{i,k}\delta_{i,j} D_{kj}^{(\beta)}(g) = \\
&= \delta_{\alpha,\beta}\frac{\#(G)}{d_\alpha}\sum_{i=1}^{d_\alpha} D_{ii}^{(\alpha)}(g) = \delta_{\alpha,\beta}\frac{\#(G)}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\chi^{(\alpha)} * \chi^{(\alpha)}(g) = \sum_{h\in G} \chi^{(\alpha)}(h)\chi^{(\alpha)}(h^{-1}g) = \frac{\#(G)}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}(g).$$

Note que $\chi(h(h^{-1}g)h^{-1}) = \chi(h^{-1}g)$, mas por outro lado, $\chi(h(h^{-1}g)h^{-1}) = \chi(gh^{-1})$. Logo, temos que

$$\sum_{h\in G} \chi^{(\alpha)}(gh^{-1})\chi^{(\alpha)}(h) = \frac{\#(G)}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}(g).$$

■

Definição 2.2.11 *A* tabela de caracteres *(ou também* tábua de caracteres*) de um grupo G é a matriz quadrada T_G de tamanho $\#(\widehat{G}) = \#(\mathcal{C})$, com colunas indexadas pelas classes de G $C_1, \ldots, C_l$ e linhas por $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \widehat{G}$. Os elementos são $\chi^{(\alpha_i)}(C_j)$, com $i, j \in \{1, \ldots, l\}$ onde $\chi^{(\alpha_i)}(C_j) = \chi^{(\alpha_i)}(g)$ para algum $g \in C_j$.*

Observe que, a tábua de caracteres de G depende da ordenação dos caracteres irredutíveis e das classes de conjugação do grupo G. De qualquer forma, ela sempre será uma matriz inversível, como mostra o próximo resultado:

Proposição 2.2.12 *Para toda ordenação dos caracteres irredutíveis e das classes de conjugação do grupo G, T_G é inversível.*

Prova Fixe $\chi^{(\alpha_1)}, \ldots, \chi^{(\alpha_l)}$ uma ordenação dos caracteres irredutíveis de G, e $C_1, \ldots, C_l$ uma ordenação das classes de conjugação de G. Afirmamos que as linhas da matriz T_G com respeito a estas ordenações são linearmente independentes; de fato, basta provarmos que as colunas da matriz transposta à T_G são linearmente independentes. Denote por $v_1, \ldots, v_l$ as colunas de $(T_G)^t$,observando que $v_{ij} = \chi^{(\alpha_j)}(C_i)$. Suponha que existam $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{l} a_j v_j = 0.$$

Então, para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$ temos

$$0 = \sum_{j=1}^{l} a_j v_{ij} = \sum_{j=1}^{l} a_j \chi^{(\alpha_j)}(C_i) = \sum_{j=1}^{l} a_j \chi^{(\alpha_j)}(g) \ \ \forall g \in C_i.$$

Como os C_i formam uma partição de G, concluímos que

$$0 = \sum_{j=1}^{l} a_j \chi^{(\alpha_j)}(g) \ \ \forall g \in G,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{l} a_j \chi^{(\alpha_j)} = 0.$$

Lembrando que os $\chi^{(\alpha_j)}$ são linearmente independentes, pelo teorema 2.2.7, segue-se que $a_j = 0 \ \forall j$, provando com isto o afirmado. Temos de imediato que T_G é inversível.

■

Proposição 2.2.13 *Dados $a, \beta \in \widehat{G}$, $C_i \in \{C_1, \ldots, C_l\}$ quaisquer temos*

$$\sum_{i=1}^{l} \#(C_i)\chi^{(\alpha)}(C_i)\overline{\chi^{(\beta)}(C_i)} = \delta_{\alpha,\beta}\#(G).$$

Prova Sejam $\alpha, \beta \in \widehat{G}$ arbitrários. Então pela proposição 2.2.7

$$\left\langle \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)} \right\rangle = \delta_{\alpha,\beta}. \tag{I}$$

Mas por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)} \right\rangle &= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} \chi^{(\alpha)}(g) \overline{\chi^{(\beta)}(g)} = \\ &= \frac{1}{\#(G)} \sum_{i=1}^{l} \#(C_i) \chi^{(\alpha)}(C_i) \overline{\chi^{(\beta)}(C_i)} \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Logo, como I e II são iguais

$$\sum_{i=1}^{l} \#(C_i) \chi^{(\alpha)}(C_i) \overline{\chi^{(\beta)}(C_i)} = \delta_{\alpha,\beta} \#(G).$$

$\blacksquare$

Note que esta proposição nos diz que a matriz $U = \left[\sqrt{\frac{\#(C_j)}{\#(G)}} \chi^{\alpha_i}(C_j) \right]_{ij}$, onde $i, j \in \{1, \ldots, l\}$ é tal que $UU^* = Id$, pois

$$(UU^*)_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\#(C_i)}{\#(G)} \chi^{(\alpha_i)}(C_k) \overline{\chi^{(\alpha_j)}(C_k)} = \delta_{i,j}.$$

Por otro lado, é fácil ver que as colunas de U são lineramente independentes pela proposição 2.2.12, donde segue que U é inversível; como acima mostramos que a sua inversa a direita é U^*, temos que $U^*U = Id$. Logo U é uma matriz unitária.

2.3 Representações abelianas e grupo dual

Seja G um grupo finito. O *subgrupo dos comutadores,* denotado por $[G, G]$, é o grupo gerado pelos elementos da forma $ghg^{-1}h^{-1}$ para quaisquer $g, h \in G$. É fácil ver que $[G, G]$ é um subgrupo normal. O quociente $\frac{G}{[G,G]}$ é chamado a *abelianização de G.*

Nesta seção iremos provar que o número de representações irredutíveis unidimensionais de G é

$$\#\left(\frac{G}{[G,G]}\right) = \frac{\#(G)}{\#([G,G])}$$

e, em particular, ele divide a ordem de G.

Daqui para frente denote $\mathsf{A} = \frac{G}{[G,G]}$.

A idéia desta demonstração será provar que $\{U \in \widehat{G} : dim(U) = 1\}$ está em correspondência $1-1$ com $\widehat{\mathsf{A}}$.

Note que A é abeliano pois, sejam $[g], [h] \in \mathsf{A}$ quaisquer. Então

$$\begin{aligned} [ghg^{-1}h^{-1}] = [e] &\implies [g][h][g]^{-1}[h]^{-1} = [e] \implies \\ &\implies [g][h] = [h][g]. \end{aligned}$$

Logo A é abeliano e deste fato segue que $\#(\widehat{\mathsf{A}}) = \#(\mathsf{A})$ pelo corolário 2.1.6.

Precisaremos dos seguintes resultados:

Teorema 2.3.1 *Sejam $\pi : G \longrightarrow \mathsf{A}$ a projeção canônica, H grupo finito e $\varphi : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Então* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *é abeliano se, e somente se, existe um único homomorfismo $\psi : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{H}$ tal que $\varphi = \psi \circ \pi$.*

Prova ($\Leftarrow$) Suponha que para qualquer $g \in G$ $\varphi(g) = \psi(\pi(g))$. Então para cada $h \in G$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi(g)\varphi(h) &= \varphi(gh) = \psi(\pi(gh)) = \\ &= \psi([g][h]) = \psi([h][g]) = \\ &= \psi(\pi(hg)) = \varphi(hg) = \varphi(h)\varphi(g).\end{aligned}$$

Portanto $\mathrm{Im}(\varphi)$ é abeliano.

($\Rightarrow$) Defina

$$\begin{aligned}\psi : \mathsf{A} &\longrightarrow \mathsf{H} \\ [g] &\longmapsto \psi([g])\end{aligned}$$

dada por $\psi([g]) = \varphi(g)$.

Claramente $\varphi = \psi \circ \pi$.

- ψ está bem definida:

  Sejam $[g], [g'] \in \mathsf{A}$ tais que $[g] = [g']$. Então $g' = gh$, para algum $h \in [\mathsf{G}, \mathsf{G}]$, onde $h = g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} \ldots g_n h_n g_n^{-1} h_n^{-1}$ para $g_1, h_1, \ldots, g_n, h_n \in G$. Logo

$$\begin{aligned}\psi([g']) &= \varphi(g') = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \\ &= \varphi(g)\varphi(g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} \ldots g_n h_n g_n^{-1} h_n^{-1}) = \\ &= \varphi(g)\varphi(g_1)\varphi(h_1)\varphi(g_1^{-1})\varphi(h_1^{-1}) \ldots \varphi(g_n)\varphi(h_n)\varphi(g_n^{-1})\varphi(h_n^{-1}) = \\ &= \varphi(g)\varphi(g_1)\varphi(g_1^{-1})\varphi(h_1)\varphi(h_1^{-1}) \ldots \varphi(g_n)\varphi(g_n^{-1})\varphi(h_n)\varphi(h_n^{-1}) = \\ &= \varphi(g)\varphi(g_1 g_1^{-1})\varphi(h_1 h_1^{-1}) \ldots \varphi(g_n g_n^{-1})\varphi(h_n h_n^{-1}) = \\ &= \varphi(g) = \psi([g]).\end{aligned}$$

  Portanto ψ está bem definida.

- ψ é homomorfismo:

  Sejam $[g], [h] \in \mathsf{A}$ quaisquer. Então

$$\psi([g][h]) = \psi([gh]) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \psi([g])\psi([h]).$$

  Logo ψ é homomorfismo.

- Unicidade da ψ :

  Suponha que exista $c : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{H}$ tal que $\varphi = \widetilde{\psi} \circ \pi$. Então para qualquer $[g] \in \mathsf{A}$ temos

$$\widetilde{\psi}([g]) = \varphi(g) = \psi([g]).$$

  Portanto $\widetilde{\psi} = \psi$.

■

Definição 2.3.2 *Uma representação $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ de G, é dita ser uma* representação abeliana de G, *se a* $\mathrm{Im}(U)$ *for um subgrupo abeliano de* $\mathcal{U}(\mathbb{V})$.

Lema 2.3.3 *Seja $U : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{V})$ representação de dimensão finita de um grupo G. Então, $U(G) = \mathrm{Im}(U)$ é abeliano se, e somente se, U é equivalente a uma soma direta de representações irredutíveis unidimensionais.*

Prova ($\Leftarrow$) Se U é equivalente a uma soma direta de representações irredutíveis unidimensionais, então existe $W \in L\left(\underset{\alpha\in\widehat{G}}{\oplus} \eta_\alpha \mathbb{V}^{(\alpha)}, \mathbb{V}\right)$ unitário tal que, para todo $g \in G$, $U(g) = WD(g)W^{-1}$, e $D = \underset{\alpha\in\widehat{G}}{\oplus} \eta_\alpha D^{(\alpha)}$ é uma matriz diagonal. Então para quaisquer $g, h \in G$ temos

$$\begin{aligned} U(g)U(h) &= WD(g)W^{-1}WD(h)W^{-1} = \\ &= WD(g)D(h)W^{-1} = \\ &= WD(h)D(g)W^{-1} = \\ &= WD(h)W^{-1}WD(g)W^{-1} = \\ &= U(h)U(g). \end{aligned}$$

Portanto $U(G) = \mathrm{Im}(U)$ é abeliano.

($\Rightarrow$) Suponha que para qualquer $g, h \in G$

$$U(g)U(h) = U(h)U(g).$$

Como U é unitariamente equivalente a uma soma direta de representações irredutíveis, então para cada $\alpha \in \widehat{G}$

$$D^{(\alpha)}(g)D^{(\alpha)}(h) = D^{(\alpha)}(h)D^{(\alpha)}(g).$$

Logo pela 1ª forma do Lema de Schur temos que $D^{(\alpha)}(g) = \lambda_\alpha \mathbb{I}$, onde $\mathbb{I} = Id_{\eta_\alpha \mathbb{V}^{(\alpha)}}$.

Portanto a $\dim(\mathbb{V}^{(\alpha)}) = 1$, donde segue que U é equivalente a uma soma direta de representações irredutíveis unidimensionais.

■

Teorema 2.3.4 *O número de representações irredutíveis unidimensionais de G é*

$$\#\left(\frac{G}{[G,G]}\right) = \frac{\#(G)}{\#([G,G])}$$

e, em particular, ele divide a ordem de G.

Prova Pelo teorema 2.3.1, há uma correspondência $1-1$ entre representações abelianas de G e representações de A. Pelo lema 2.3.3, as representações abelianas de G são equivalentes a somas diretas de representações irredutíveis unidimensionais. Logo, há uma correspondência $1-1$ entre representações de A e $\{\alpha \in \widehat{G} : d_\alpha = 1\}$, e portanto

$$\{\alpha \in \widehat{G} : d_\alpha = 1\} = \#(\widehat{\mathsf{A}}) = \#(\mathsf{A}) = \frac{\#(G)}{\#([G,G])}.$$

$\blacksquare$

Note que estes teoremas dizem que $\widehat{G_1}$ (definido na seção 1.6) é $\widehat{\dfrac{G}{[G,G]}}$, o grupo dual de $\dfrac{G}{[G,G]}$.

2.4 O Teorema da dimensão

Nosso objetivo nesta seção é a prova do Teorema da Dimensão que diz se G é um grupo finito e $\alpha \in \widehat{G}$ então, d_α divide $\#(G)$.

Este é um dos mais profundos teoremas no assunto, e sua prova uma das mais surpreendentes. A prova aqui apresentada usa teoria de números inteiros algébricos, um assunto que, à primeira vista, parece não estar relacionada com representações de grupos.

Definição 2.4.1 *Um* número algébrico *é um número complexo z, que obedece a uma equação polinomial*

$$p(z) = 0,$$

com $p \in \mathbb{Z}[x]$, isto é,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$. Se z obedece a uma tal equação com $a_n = 1$ (polinômio mônico), então z é chamado um inteiro algébrico.

Denotaremos por A o conjunto dos inteiros algébricos e, como de costume, por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais.

Lema 2.4.2 *$A \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$, isto é, todo inteiro algébrico racional é um número inteiro.*

Prova Seja $\lambda \in A \cap \mathbb{Q}$, arbitrário. Então $\lambda = \dfrac{r}{s}$, para algum $r, s \in \mathbb{Z}$, com $s \neq 0$. Sem perda de generalidade suponha que $mdc(r, s) = 1$. Portanto existe

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, com pelo menos um $a_i \neq 0,\ i \in \{0, \ldots, n-1\}$, tal que

$$p(\lambda) = 0.$$

Logo,

$$p(\lambda) = p\left(\frac{r}{s}\right) = \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
r^n &= -\left[s a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + s^{n-1} a_1 r + s^n a_0\right] = \\
&= s\left[(-a_{n-1} r^{n-1}) + \ldots + (-s^{n-2} a_1 r) + (-s^{n-1} a_0)\right] \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\ & s \mid r^n \Longrightarrow s = \pm 1 \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

■

Mais adiante mostraremos que $\dfrac{\#(G)}{d_\alpha} \in A$. Como este valor é claramente racional, o teorema acima implicará neste valor ser inteiro. Provando desta forma o Teorema da dimensão.

Para mostrar que $\dfrac{\#(G)}{d_\alpha}$ é um inteiro algébrico, precisaremos de alguns resultados de teoria de números algébricos elementar.

Definição 2.4.3 *$Hom(\mathbb{Z}^n)$ denotará o conjunto das matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Chamaremos os elementos de $Hom(\mathbb{Z}^n)$ de matrizes inteiras.*

Lema 2.4.4 *Autovalores de matrizes inteiras são inteiros algébricos e reciprocamente, se $\lambda \in A$, então λ é autovalor de uma matriz inteira.*

Prova ($\Rightarrow$) Seja λ autovalor de $B \in Hom(\mathbb{Z}^n)$, arbitrária. Então sabemos que λ é raiz do polinômio característico, ou seja,

$$p(\lambda) = 0,$$

onde $p(x) = \det(xId - B)$.

Observe que

$$xId - B = \begin{pmatrix} x - b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n} \\ -b_{21} & x - b_{22} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \cdots & x - b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Agora apenas para facilitar a notação, denote $C = xId - B$.

Então

$$\begin{aligned}\det(xId - B) &= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\text{sgn }\sigma} C_{1\sigma(1)}C_{2\sigma(2)}\dots C_{n\sigma(n)} = \\ &= C_{11}C_{22}\dots C_{nn} + \sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma\neq e}} (-1)^{\text{sgn}\,\sigma} C_{1\sigma(1)}C_{2\sigma(2)}\dots C_{n\sigma(n)} = \\ &= \prod_{i=1}^{n}(x-b_{ii}) + \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\text{sgn }\sigma} C_{1\sigma(1)}C_{2\sigma(2)}\dots C_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Logo $p(x)$ é mônico. E como seus coeficientes são inteiros e $p(\lambda) = 0$ temos que $\lambda \in A$.
($\Leftarrow$) Seja $\alpha \in A$, qualquer. Então existe

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, com pelo menos um $a_i \neq 0,\ i \in \{0, \ldots, n-1\}$, tal que

$$p(\lambda) = 0.$$

Seja B a matriz $n \times n$, onde

$$b_{ij} = -\delta_{i+1,j} + \delta_{i,n}(-1)^{n+1-j}a_{j-1}.$$

Logo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ (-1)^n a_0 & (-1)^{n-1}a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Claramente $B \in Hom(\mathbb{Z}^n)$.
Note que

$$\begin{aligned}\det(xId - B) &= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1}a_0 \cdot 1 + (-1)^{n+2}(-1)^n a_1 x + +(-1)^{n+3}(-1)^{n-1}a_2x^2 + \ldots + \\ &\quad +(-1)^{n+n-1}(-1)^3 a_{n-2}x^{n-2} + (-1)^{n+n}(x + a_{n-1})x^{n-1} \\ &= p(x).\end{aligned}$$

Como $p(\lambda) = 0$, λ é autovalor de B.

$\blacksquare$

Lema 2.4.5 *A é um anel.*

Prova Como $A \subseteq \mathbb{C}$ basta provarmos que para quaisquer $\lambda, \rho \in A$ temos que $-\lambda, \lambda + \rho, \lambda\rho \in A$.

Sabemos pela recíproca do lema 2.4.4 se $\lambda, \rho \in A$, então existem $B, C \in Hom(\mathbb{Z}^n)$ tais que λ, ρ são autovalores de B e C, respectivamente.

Sejam v, w autovetores de B e C, com respectivos autovalores λ e ρ, ou seja,

$$Bv = \lambda v \text{ e } Cw = \rho w.$$

Vamos mostrar que $-\lambda, \lambda+\rho$ e $\lambda\rho$ são autovalores de matrizes inteiras e, então pelo lema 2.4.4 $-\lambda, \lambda+\rho, \lambda\rho \in A$.

Note que

$$\begin{aligned}(Bv)_k &= \sum_{i=1}^{n} b_{ki}v_i = \lambda v_k, \text{ e} \\ (Cw)_l &= \sum_{j=1}^{n} b_{lj}w_j = \rho w_l.\end{aligned}$$

Considere $\{e_k\}_{k=1}^n, \{f_l\}_{l=1}^m$ bases de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$, respectivamente.

- $\lambda\rho$:

  Vamos mostrar que $\lambda\rho$ é autovalor de $B \otimes C$ com autovetor $v \otimes w$. De fato,

$$\begin{aligned}(B \otimes C)(v \otimes w) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i w_j (B \otimes C)(e_i \otimes f_j) = \\ &= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j,l=1}^{m} v_i w_j (B \otimes C)_{kl,ij} \cdot (e_k \otimes f_l) = \\ &= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j,l=1}^{m} (b_{ki}v_i)(c_{lj}w_j) e_k \otimes f_l = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \lambda v_k \rho w_l e_k \otimes f_l = \lambda\rho(v \otimes w).\end{aligned}$$

  Como $B \otimes C \in Hom(\mathbb{Z}^n)$ temos que $\lambda\rho \in A$.

- $\lambda + \rho$:

  Vamos mostrar que $\lambda+\rho$ é autovalor de $B \otimes Id + Id \otimes C$ com autovetor $v \otimes w$. De fato,

$$\begin{aligned}&(B \otimes Id + Id \otimes C)(v \otimes w) = \\ &= (B \otimes Id)(v \otimes w) + (Id \otimes C)(v \otimes w) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i w_j (B \otimes Id)(e_i \otimes f_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i w_j (Id \otimes C)(e_i \otimes f_j) = \\ &= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j,l=1}^{m} v_i w_j (B \otimes Id)_{kl,ij} \cdot (e_k \otimes f_l) + \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j,l=1}^{m} v_i w_j (Id \otimes C)_{kl,ij} \cdot (e_k \otimes f_l) =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j,l=1}^{m}(b_{ki}v_i)(\delta_{l,j}w_j)e_k \otimes f_l + \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j,l=1}^{m}(\delta_{k,i}v_i)(c_{lj}w_j)e_k \otimes f_l = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\lambda v_k w_l e_k \otimes f_l + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} v_k \rho w_l e_k \otimes f_l = \\
&= \lambda(v \otimes w) + \rho(v \otimes w) = (\lambda + \rho)\,(v \otimes w).
\end{aligned}
$$

Como $B \otimes Id + Id \otimes C \in Hom(\mathbb{Z}^n)$ temos que $\lambda + \rho \in A$.

- $-\lambda$:

  Vamos mostrar que $-\lambda$ autovalor de $-B \otimes Id$ com autovetor $v \otimes w$. De fato,

$$
\begin{aligned}
(-B \otimes Id)(v \otimes w) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i w_j (-B \otimes Id)(e_i \otimes f_j) = \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j,l=1}^{m} v_i w_j (-B \otimes Id)_{kl,ij} \cdot (e_k \otimes f_l) = \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j,l=1}^{m}(-b_{ki}v_i)(\delta_{l,j}w_j)e_k \otimes f_l = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} - \lambda v_k w_l e_k \otimes f_l = \\
&= -\lambda(v \otimes w).
\end{aligned}
$$

  Como $-B \otimes Id \in Hom(\mathbb{Z}^n)$ temos que $-\lambda \in A$.

■

Lema 2.4.6 *Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in A$. Então existem $m \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{C}^m$, e matrizes inteiras $m \times m$ $B_1, \ldots, B_k$ tais que para qualquer $j \in \{1, \ldots, k\}$*

$$B_j v = \lambda_j v.$$

Prova Pela recíproca do lema 2.4.4 existe $C_i \in Hom(\mathbb{Z}^n)$ e $v_i \in \mathbb{C}^{n_i}$ tal que

$$C_i v_i = \lambda_i v_i.$$

Tome $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \in \mathbb{C}^{n_1 \ldots n_k}$ e $B_i = Id \otimes \ldots \otimes Id \otimes \underbrace{C_i}_{\text{i-ésima entrada}} \otimes Id \otimes \ldots \otimes Id$, com $i \in \{1, \ldots, k\}$. Logo para qualquer $j \in \{1, \ldots, k\}$

$$B_j v = \lambda_j v$$

e $m = n_1 \ldots n_k$.

■

Lema 2.4.7 *Sejam B uma matriz com elementos em A e λ um autovalor de B, então $\lambda \in A$.*

Prova Seja B uma matriz $n \times n$ com $b_{ij} \in A$, $ij \in \{1, \ldots, n\}$. Então pelo lema 2.4.6 existem $C_{ij} \in Hom(\mathbb{Z}^m)$ e $w \in \mathbb{C}^m$ tais que

$$C_{ij}w = b_{ij}w.$$

Seja $v \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$Bv = \lambda v.$$

Tome C matriz em $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ dada por

$$C = \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes C_{ij},$$

onde E_{ij} é a matriz $n \times n$ com 1 na posição ij e 0 no resto.
Claramente $C \in Hom(\mathbb{Z}^{nm})$.
Tome $\mathrm{v} = v \otimes w$.
Note que

$$\begin{aligned} C\mathrm{v} &= \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes C_{ij}(v \otimes w) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij}(v) \otimes C_{ij}(w) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij}(v) b_{ij} \otimes w = \\ &= B(v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) = \lambda \mathrm{v}. \end{aligned}$$

Como λ é autovalor de uma matriz inteira pelo lema 2.4.4 $\lambda \in A$.

■

Note que pelo argumento do lema 2.4.4, isto implica que a raiz de um polinômio mônico em $A[x]$ está em A.

A "ponte"entre representações de grupos e inteiros algébricos vem do seguinte lema:

Lema 2.4.8 *Seja χ um caracter de uma representação de um grupo finito G. Então para qualquer $g \in G$ temos que $\chi(g) \in A$.*

Prova Seja U uma representação qualquer de G e $g \in G$, arbitrário. Como G é finito existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $g^n = e$. Seja λ_g autovalor de $U(g)$, pela proposição 1.1.8 os autovalores de $U(g)$ são raízes da unidade, logo λ_g é raiz do seguinte polinômio

$$p(x) = x^n - 1.$$

Observe que $p(x)$ é mônico e seus coeficientes são inteiros, donde segue que λ_g é um inteiro algébrico.

De um resultado de álgebra linear, sabemos que o traço de uma matriz é igual a soma de seus autovalores, logo

$$\chi_U(g) = \sum_{g \in G} \lambda_g \in A,$$

já que pelo lema 2.4.5 A é anel.

■

Finalmente já temos os resultados necessários para demonstrarmos o Teorema da dimensão.

Teorema 2.4.9 (da dimensão) *Se G é um grupo finito e $\alpha \in \widehat{G}$ então, d_α divide $\#(G)$.*

Prova Seja $\alpha \in \widehat{G}$, qualquer. Considere B uma matriz onde seus elementos são indexados em G, ou seja,

$$B_{gh} = \chi^{(\alpha)}(gh^{-1})$$

onde $g, h \in G$ e v um vetor também indexado por G, isto é, $v_g = \chi^{(\alpha)}(g)$, onde v_g é a g-ésima entrada do vetor v.

Note que B é uma matriz onde seus coeficientes são inteiros algébricos pelo lema 2.4.8.

Portanto pelo teorema 2.2.10 temos

$$\begin{aligned} (Bv)_g &= \sum_{h \in G} B_{xh} v_h = \sum_{h \in G} \chi^{(\alpha)}(gh^{-1}) \chi^{(\alpha)}(h) = \\ &= \frac{\#(G)}{d_\alpha} \chi^{(\alpha)}(g) = \frac{\#(G)}{d_\alpha} v_g \end{aligned}$$

Logo

$$Bv = \frac{\#(G)}{d_\alpha} v.$$

Então, $\frac{\#(G)}{d_\alpha}$ é um autovalor da matriz B (v não é identicamente nulo visto que $v_e = d_\alpha$). Como já vimos que B é uma matriz com coeficientes em A, pelo lema 2.4.7, $\frac{\#(G)}{d_\alpha} \in A$. Obviamente, $\frac{\#(G)}{d_\alpha} \in \mathbb{Q}$, donde pelo lema 2.4.2, $\frac{\#(G)}{d_\alpha} \in \mathbb{Z}$; isto é, d_α divide $\#(G)$.

■

Conclusão

É fato que poucas foram as relações concretas expostas no decorrer do texto entre teoria de representações de grupos e teoria de grupos, entre elas, por exemplo obtivemos a relação de que a soma do quadrado das ordens das representações de G é igual à cardinalidade de G.

Este trabalho deve ser visto como uma introdução à teoria de representações de grupos finitos, há muitos resultados interessantes por vir. Um deles é o teorema de Burnside (grupos finitos cuja ordem é dividida no máximo por dois primos distintos são solúveis) que apenas no final da década de 60 obteve uma demonstração sem o uso de teoria de caracteres. A própria teoria de caracteres é muito abrangente, uma pergunta muito relevante é até que ponto uma tábua de caracteres de um grupo o determina. Em [3] temos um exemplo de dois grupos não isomorfos que possuem a mesma tábua, a saber, o D_4 e o Q_8. Portanto sem dúvidas ainda há muitos resultados a serem explorados, alguns inclusive bem complexos.

Outro caminho natural é dar seqüência no estudo de teoria de representações para grupos não finitos, bem como o estudo da C^*-álgebra de grupos não finitos. Como referência ficam [5] e [1], respectivamente.

Por fim, apenas gostaria de observar, que no final do texto ficou evidente algo muito comum na matemática, a existência de conexões entre teorias aparentemente desconexas. Isto nos faz refletir sobre muitas coisas, dentre elas sobre a intrigante estrutura que está por trás de todas estas teorias. Sem dúvida, uma das evidências que a profundidade da estrutura é grande é o fato curioso que uma teoria tão abstrata quanto teoria de grupos, possua tantas aplicações, na própria matemática (mas até este ponto é natural), na física, na química, dentre outras.

Referências Bibliográficas

[1] A. Buss. A C*-álgebra de um grupo. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

[2] R. Exel. Uma introdução às C*-álgebras. Primeira Bienal de Matemática, Minas Gerais, 2002.

[3] A. Gonçalves. *Tópicos em Representação de Grupos.* 9.º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[4] E. L. Lima. *Álgebra Linear.* Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 1998.

[5] B. Simon. *Representations of Finite and Compact Groups.* Number 10 in Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, 1996.

[6] N. E. Wegge-Olsen. *K-Theory and C*-algebras - A friendly approach.* Oxford University Press, 1993.